Esercizio: determinare l'immagine di

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\qquad a_n = \cos\left(n \frac{\pi}{3}\right), \quad n \in \mathbb{N}$

Per $\cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n = 2m \\ -1 & n = 2m+1 \end{cases}, m \in \mathbb{N}$ ci si basa sui resti della divisione per 2 di n: $n = 2m$ o $n = 2m+1$.

Ora per far sparire il denominatore 3 ed ottenere un 2, e quindi un 2π per sfruttare la 2π-periodicità del coseno, si raggruppano gli n in base al loro resto per la divisione per 6

$n = 6m \qquad a_n = \cos \cancel{6}^{2} m \frac{\pi}{\cancel{3}} = \cos 2m\pi = \cos 0 = 1$

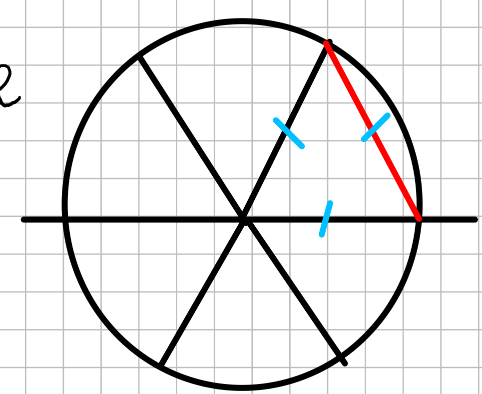
$n = 6m+1 \qquad a_n = \cos\left(2m\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \pi/3 = 1/2$

$n = 6m+2 \qquad a_n = \cos 2/3\,\pi = -1/2$

$n = 6m+3 \qquad a_n = \cos \pi = -1$

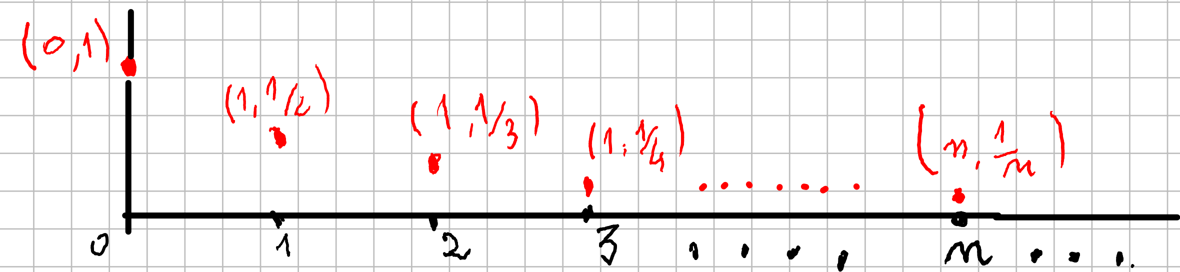
$n = 6m+4 \qquad a_n = \cos 4/3\,\pi = -1/2$

$n = 6m+5 \qquad a_n = \cos 5/3\,\pi = 1/2$

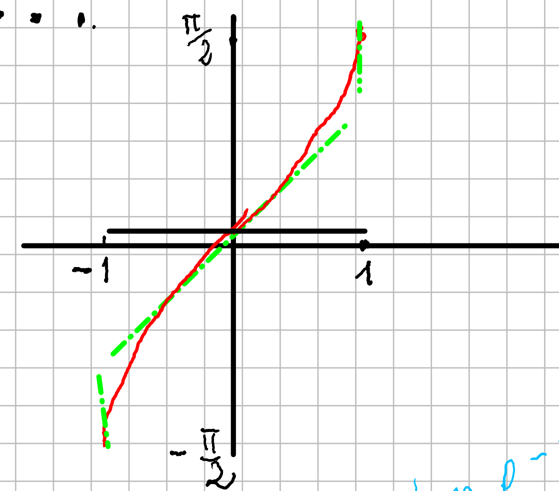


Quindi: $\mathrm{Im}\left(\cos\left(n \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) = \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

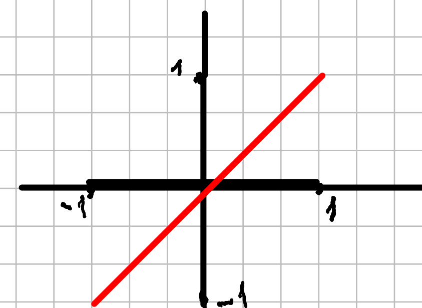
Esercizio: grafico di $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$



Esercizio: grafico di arsin x. Dominio naturale
$-1 \leq x \leq 1$

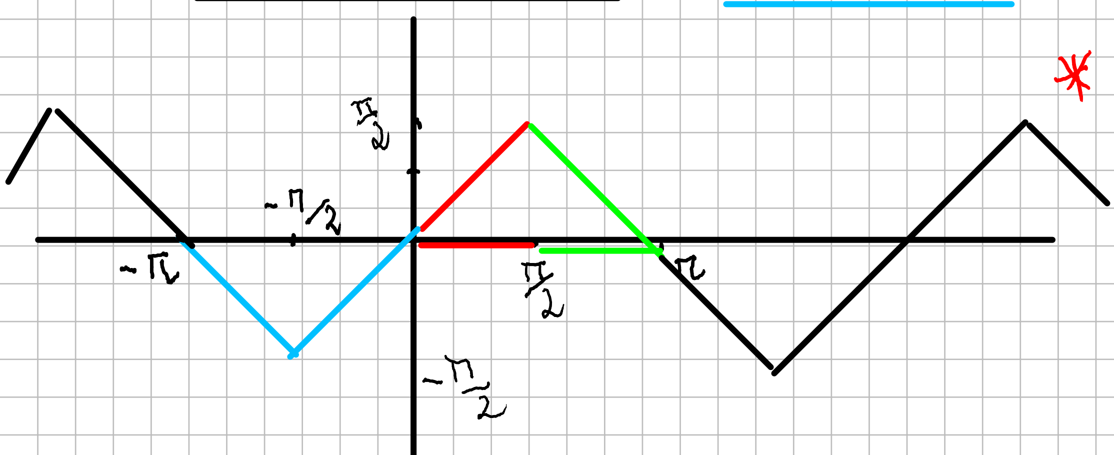


Esercizio: grafico $\sin(\operatorname{arsin} x)$:
domino naturale $-1 \leq x \leq 1$



$f(f^{-1}(x)) = x$ $\qquad x \in \operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f$

Esercizio: grafico di $\operatorname{arsin}(\sin x)$. 1) Dominio naturale $\mathbb{R}$.
2) È 2π periodica 3) È dispari. Basta disegnar il grafico su $[0,\pi]$



$*$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{arsin}(\sin x) = x$

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ $\qquad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) =$
$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(\pi - x)$

$0 \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$ $\qquad \operatorname{arsin}(\sin x) =$
$= \operatorname{arsin}(\sin(\pi - x)) \overset{*}{=} \pi - x$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ si dice massimo (minimo) di A se $m \geq a$ ($m \leq a$) $\forall a \in A$ e $m \in A$.

Es: $A = [0,1] \Rightarrow \max(A) = 1$. $\min(A) = 0$

Es: $B = [0,1)$ allora B non ha massimo.

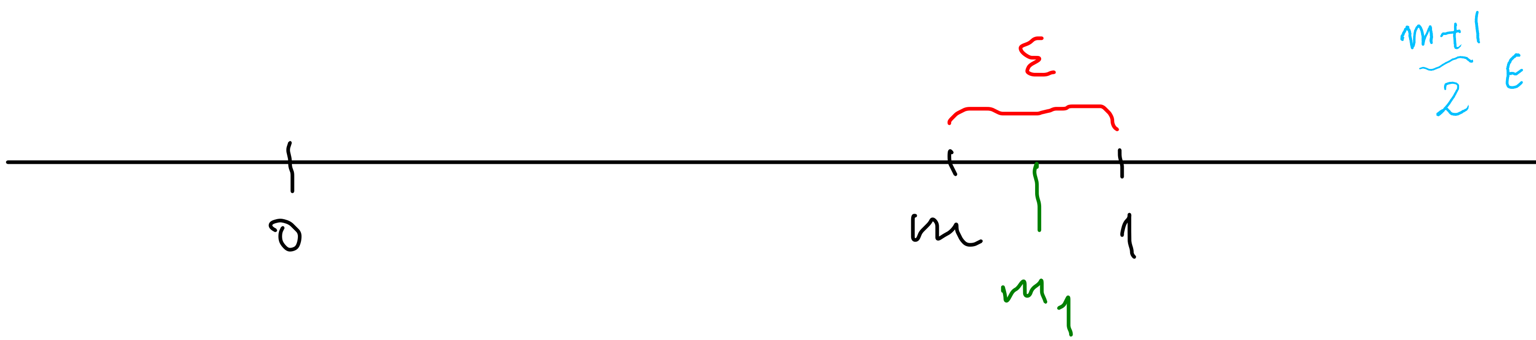
Verifichiamolo. Supponiamo per assurdo che $m \in \mathbb{R}$ sia il max di B.

$\Rightarrow m \in B$ allora $m < 1$ perché $B = [0,1)$

$m \in B \qquad m<1 \qquad m < \frac{m+1}{2} < 1$

$\Downarrow$

$\frac{m+1}{2} \in B$



poniamo $\varepsilon = 1-m > 0$ e definiamo $m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2}$. Risulta che $m_1 \in B$ ma $m < m_1$ che contrasta con il fatto che m è il massimo di B quindi dovrebbe essere $m \geq b \quad \forall b \in B$.

$A = \{ n \in \mathbb{N} : n^2 - n < 5 \}$ $\qquad A = \{0, 1, 2\}$ $\quad \exists \max A = 2$

$x^2 - x - 5 < 0 \qquad \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2}$

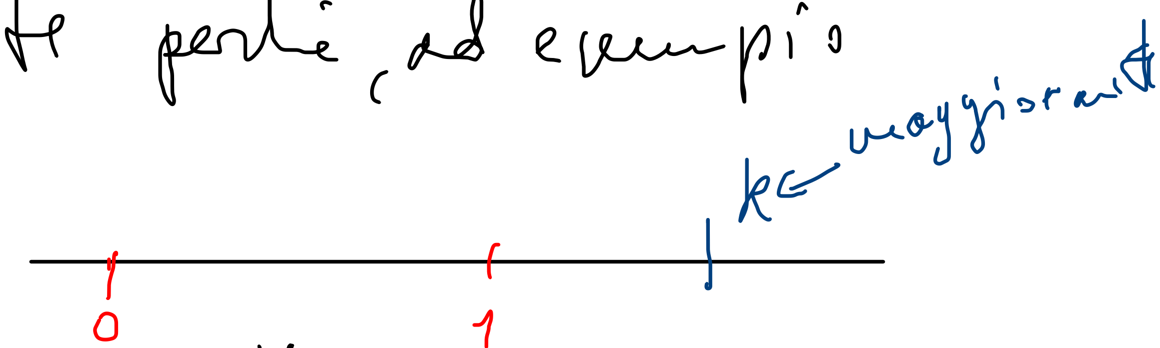
$B = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - x < 5 \}$ $\qquad \frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2}$: $B = \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2} ; \frac{1+\sqrt{21}}{2} \right)$

$\nexists$ min, max di B

Def: Dato $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ un numero $k \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante (minorante) di A se $k \geq a$ ($\leq$) $\forall a \in A$. L'insieme di tutti i maggioranti (minoranti) di A si indica con $\mathcal{M}_A$. (m_A)

Es: $A = [0,1]$ allora 3 è un maggiorante di A. $3 \in \mathcal{M}_A$.

$\frac{1}{4}$ non è un maggiorante perché, ad esempio $1 \in A$ e $1 > \frac{1}{4}$



Oss: se $\exists \max A$ ($\min A$) allora $\max A \in \mathcal{M}_A$ ($\min A \in m_A$)

<u>Oss</u>: Se esiste un maggiorante di A allora ne esistono infiniti.
Infatti se $k \in \mathcal{M}_A \Rightarrow m$ è un maggiorante di A $\forall\, m \geq k$.

<u>Es</u>: $A = \mathbb{R}$ non ha maggioranti

<u>Es</u>: $A = [4, +\infty)$ non ha maggioranti

<u>Def</u>: Se $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$ allora l'insieme A si dice <u>limitato superiormente</u>.

Convenzione un insieme <u>non</u> limitato superiormente si dirà <u>illimitato superiormente</u>

Definizioni analoghe per minimo, minorante e insieme inferiormente limitato.

Es*: m è un minorante per A se

$m \leq a \quad \forall a \in A$.

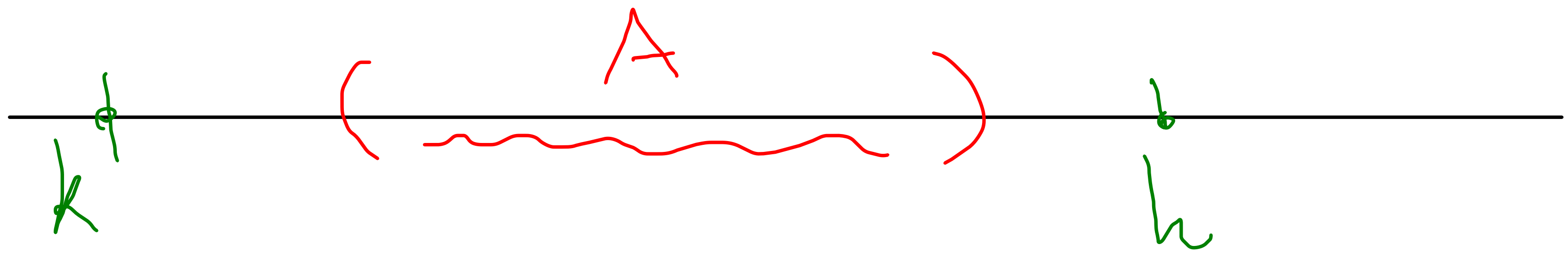
Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ se A è sia superiormente che inferiormente limitato allora A si dice

limitato.

NOTAZIONE*: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ si indica con m_A l'insieme dei minoranti di A

$\{x \in \mathbb{R} : x \leq a, \forall a \in A\}$

Oss: A è limitato se e solo se $\exists\, h, k \in \mathbb{R}$ t.c. $k \leq a \leq h \quad \forall\, a \in A$



$$A \subseteq [k; h]$$

inferiormente

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, superiormente

massimo

limitato, allora esiste il minimo

minoranti massimo

dell'insieme dei maggioranti. Tale minimo

inferiore

si dice estremo superiore di A e si

$\inf(A)$

indica con $\sup(A)$.

$\sup A = \min \mathcal{M}_A \quad (A \neq \emptyset,\ \mathcal{M}_A \neq \emptyset)$

$\inf A = \max m_A \quad (A \neq \emptyset,\ m_A \neq \emptyset)$

Es: $A = [0,1) \Rightarrow \mathcal{M}_A = [1, +\infty)$

$\min(\mathcal{M}_A) = 1 \Rightarrow \sup(A) = 1$.

Es: $A = (1, \infty) \Rightarrow m_A = (-\infty, 1]$

$\max(m_A) = 1 \Rightarrow \inf(A) = 1$

Es: $B = [0,1] \Rightarrow \mathcal{M}_B = [1, +\infty)$ $\quad \underset{B}{b} \le \underset{B}{1} \le \underset{\mathcal{M}_B}{1}$

$\Rightarrow \min(\mathcal{M}_B) = 1 \Rightarrow \sup(B) = 1.$

Oss: Se esiste $\underset{\min}{\max}(A)$ allora

$$\underset{\min}{\max}(A) = \underset{\inf}{\sup}(A).$$

Notazione: Se A non è superiormente (inferiormente) limitato scriviamo $\sup(A) = +\infty$. ($\inf(A) = -\infty$)

Esempi: $A = [0,1)$: $\sup A = 1$ ma A NON HA MASSIMO

$A = \{ \frac{1}{x} : x > 0 \}$: $\inf A = 0$ ma A NON HA MINIMO

Teo

Oss: $A \neq \emptyset$ superiormente limitato.

Allora $m = \sup(A)$ se e solo se valgono

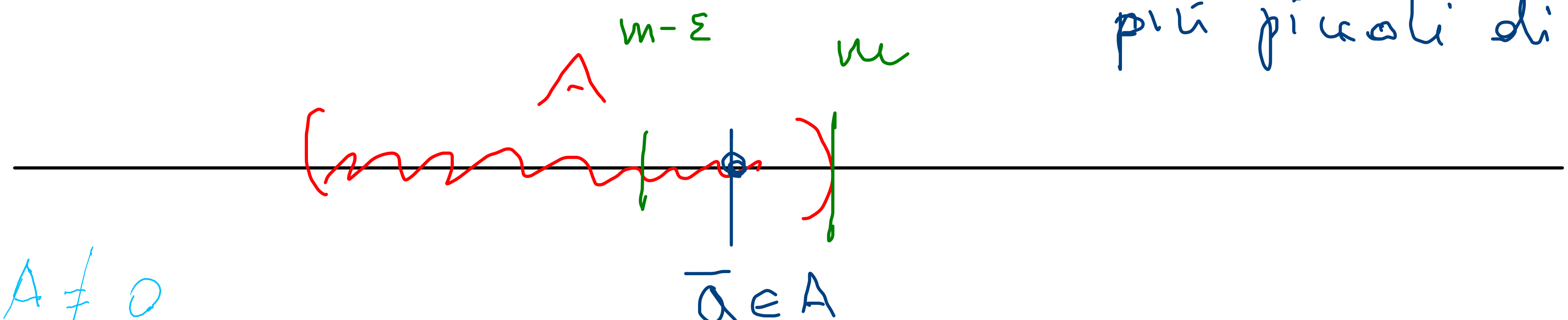
1) $a \leq m \quad \forall\, a \in A$ $\Leftarrow$ m è un maggiorante

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{a} \in A$ t.c. $\bar{a} > m - \varepsilon$.

per prefissato errore

$m \geq \bar{a} > m - \varepsilon$

non ci sono maggioranti più piccoli di m.



$A \neq \emptyset$

$m = \sup A \in \mathbb{R} \iff$

1) è un magg. di A

2) è approssimabile con precisione ε arbitraria dal basso con elementi di A

$\bar{a} \in A \quad m - \varepsilon < \bar{a} \leq m$

$0 \leq m - \bar{a} < \varepsilon$

Oss: La scrittura

$$\boxed{\sup(A) < +\infty}$$ $(\inf(A) > -\infty)$

vuol dire che l'estremo superiore di A è un numero reale quindi A è superiormente limitato. (l'estremo inferiore di A è un numero reale quindi A è inferiormente limitato)

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

in modo che valga

$$-\infty \leq x \leq +\infty \qquad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Oss: Se $x \in \mathbb{R}$ (quindi $x \neq +\infty$, $x \neq -\infty$) allora

$$-\infty < x < +\infty.$$

Operazioni in $\overline{\mathbb{R}}$.

1) Se $x \neq +\infty$ allora $x + (-\infty) = -\infty$

2) Se $x \neq -\infty$ allora $x + (+\infty) = +\infty$

3) Se $x > 0$ allora $x \cdot (+\infty) = +\infty$ e $x \cdot (-\infty) = -\infty$

4) Se $x < 0$ allora $x \cdot (+\infty) = -\infty$ e $x \cdot (-\infty) = +\infty$.

Operazioni vietate

$(+\infty) + (-\infty)$ e viceversa

$0 \cdot (+\infty)$

$0 \cdot (-\infty)$

Operazioni valide

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$

$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$.

Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$ se A è superiormente limitato allora A ha massimo e se A è inferiormente limitato allora A ha minimo.

COROLLARI DEL TEOREMA

Corollario 1 $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente

$\ast$ $\longrightarrow$ Quindi $\boxed{\inf\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0}$, e $\nexists \min\left\{\frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$

Corollario 2. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ ha sempre minimo

(è la base del "principio di induzione" e delle definizioni per "ricorrenza").

Corollario 3. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$

A è limitato (superiormente) $\Longleftrightarrow$ A ha massimo

Definizione $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}$ si dice finito

se e solo se vi è $k \in \mathbb{N}$ e vi è

$f : \{0, 1, \dots, k\} \longrightarrow B$ bigettiva

NOTA $\{0, 1, \dots, k\} = [0; k] \cap \mathbb{N}$

Corollario 4. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ è limitato $\Leftrightarrow$ è finito

$$n+1>0 \Rightarrow \frac{1}{n+1}>0$$

$*$

a) $A=\left\{\frac{1}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq(0;+\infty)$

b) $m_A=\left\{x\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N}\ x\le\frac{1}{n+1}\right\}=$

$=\{x\in\mathbb{R} : \forall n\in\mathbb{N}\ (n+1)x\le 0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R} : x\le 0\}=(-\infty;0]$

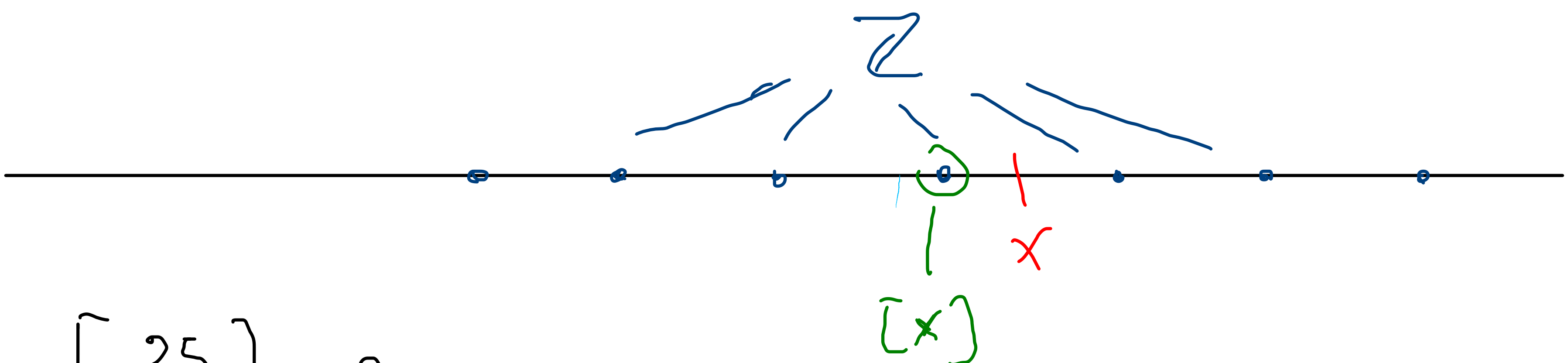
c) $\max(m_A)=0 \Rightarrow \inf A=0$

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice parte intera di x e si indica con $[x]$ il numero

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$$

VALE $\forall x$

$[x] \leq x < [x]+1$



Es: $\left[\frac{25}{10}\right] = 2$

$\left[-\frac{25}{10}\right] = -3$

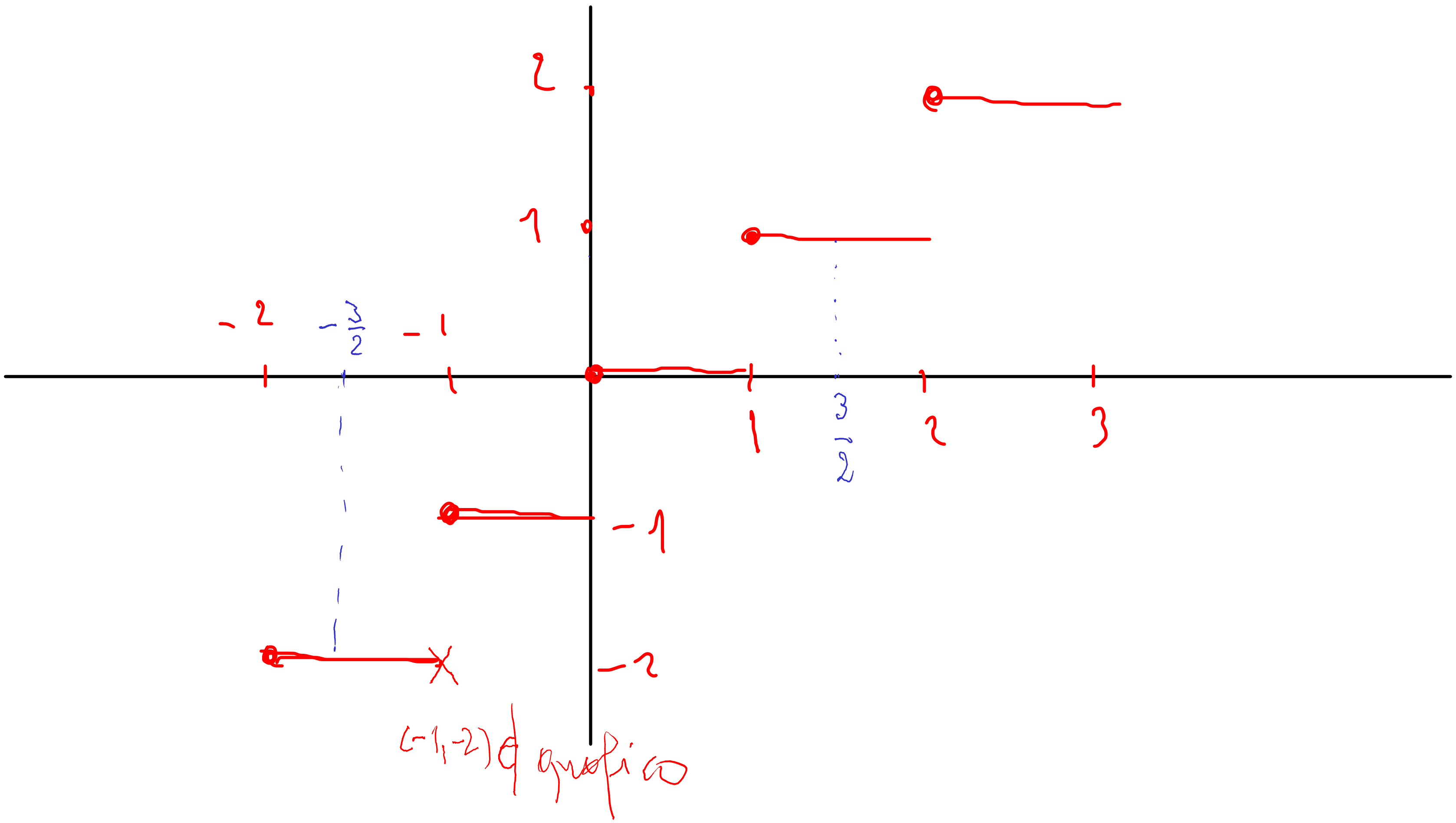
$\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} = m_{\{x\}} \cap \mathbb{Z}$

$\boxed{x \notin \mathbb{N}}$ $x > 0$ $\quad [-x] \neq -[x]$

$[x] \boxed{\leq} x < [x]+1$

$-[x] \boxed{\geq} -x > -[x]-1$

Grafico di $f(x) = [x]$



Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$

a) f si dice limitata superiormente se $f(A)$ è limitato superiormente (limitata inferiormente, limitata). *

b) f ha massimo se $f(A)$ ha massimo

$M \in f(A)$

$\uparrow$ $\exists x_0 \in A$

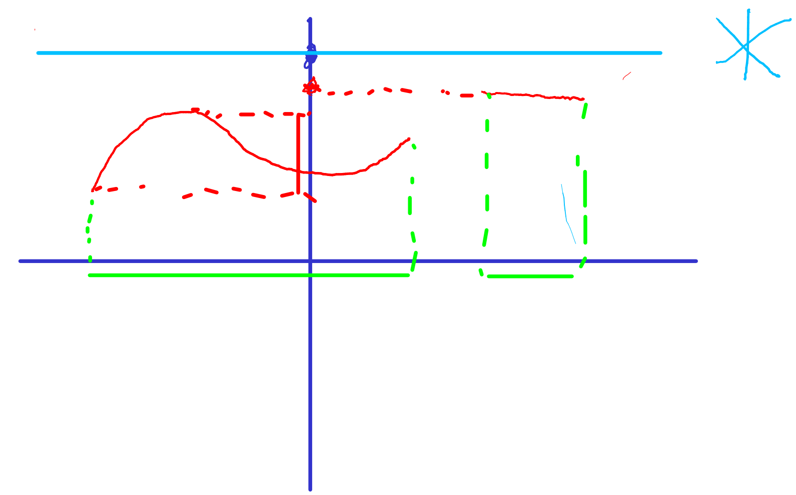
$M = f(x_0)$

si dice che M è il VALORE massimo di f e si scrive

$M = \max(f)$ se $M = \max(f(A))$.

Lo stesso per $\min(f)$.

*



c) $\sup(f) = \sup(f(A))$

se f non è limitata superiormente si scrive $\sup(f) = +\infty$.

non limitata inferiormente $\inf(f) = -\infty$.

d) Se f ha massimo allora ogni $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \max(f)$ si dice punto di massimo per f. Lo stesso per i punti di minimo.

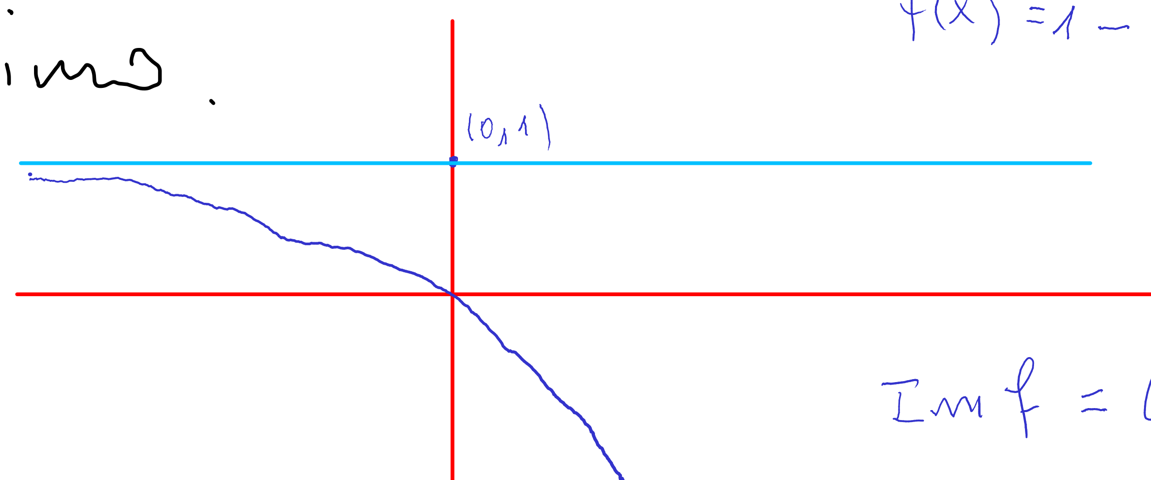
$f(x) = 1 - e^x < 1$

$e^x > 0$, $\neq$

$\nexists \max f$

$\sup f = 1$

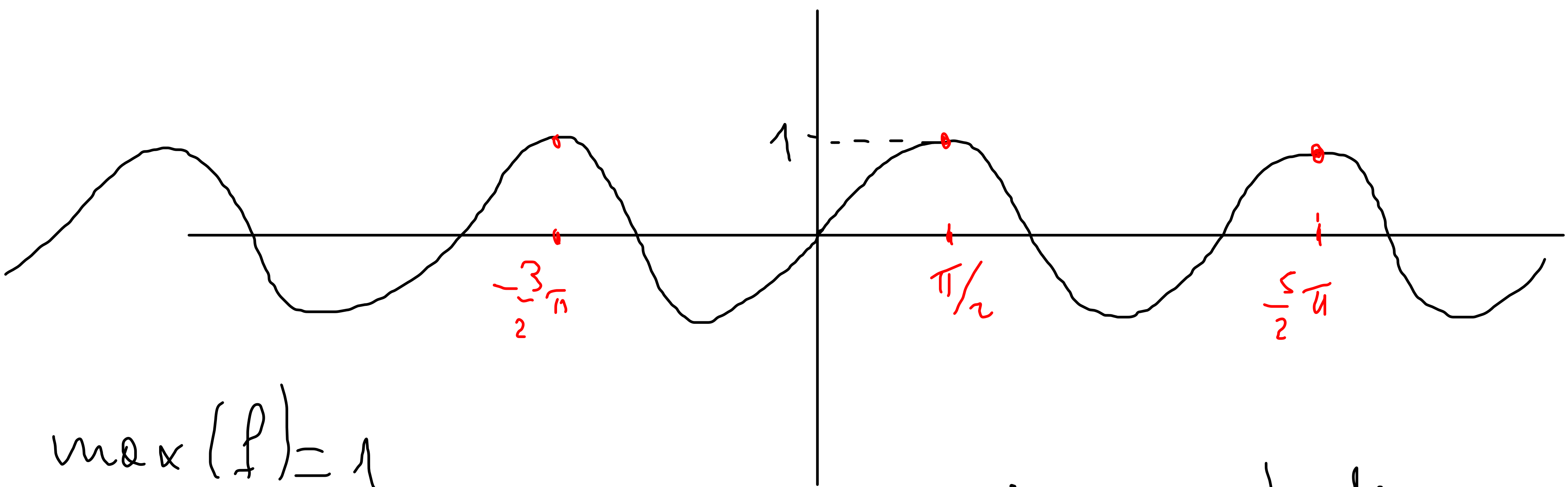
$\inf f = -\infty$



$\mathrm{Im}\, f = (-\infty; 1)$

Oss: Il massimo di f è unico, i punti di massimo potrebbero essere molti.

Es: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sin x$



$\max(f)=1$

$x_0=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ sono tutti punti di max.

Es: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$

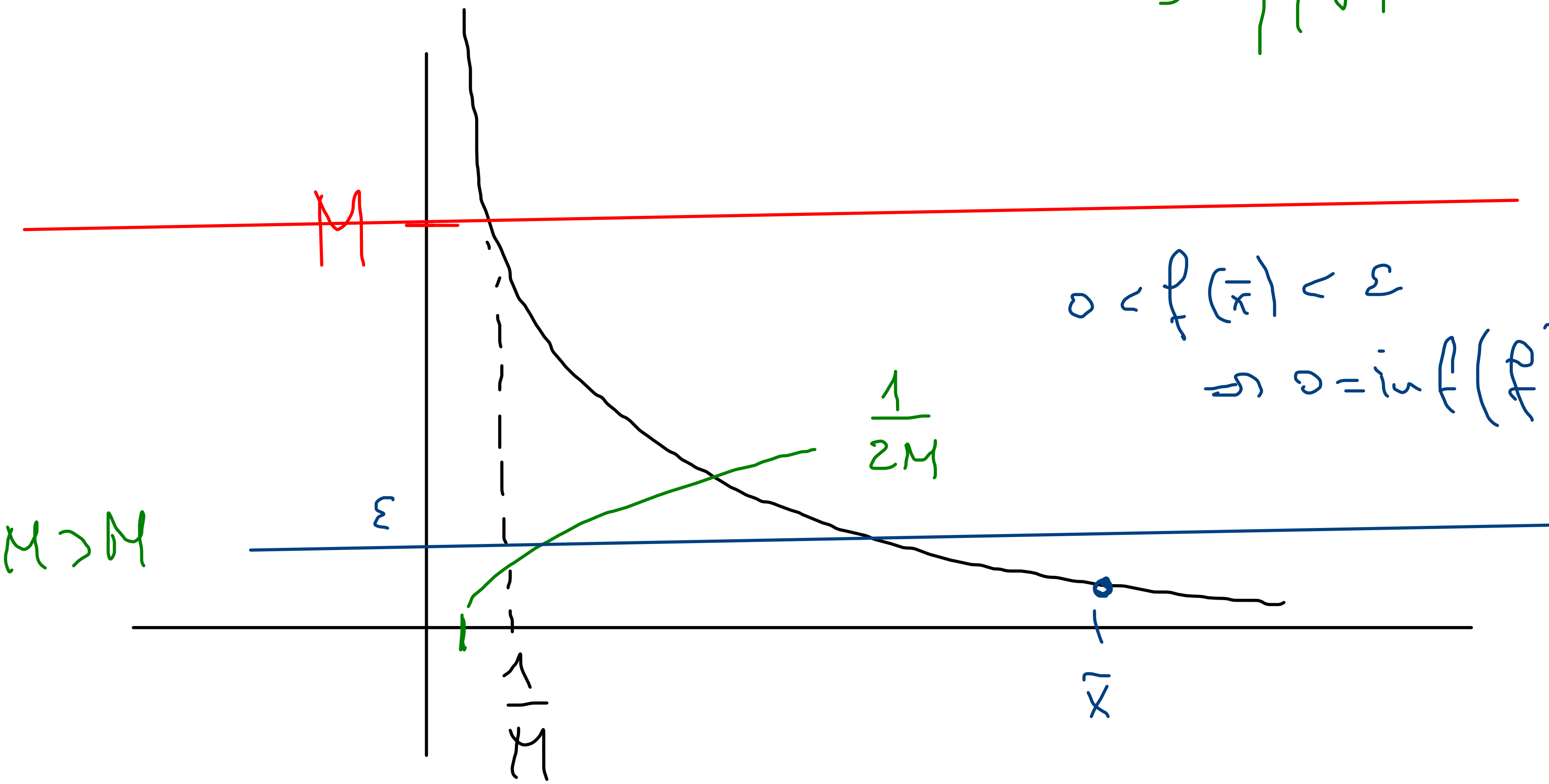
f non ha né max né min

$\sup(f)=+\infty$

$M>0$

$f\left(\frac{1}{M}\right)=M$

$f\left(\frac{1}{2M}\right)=2M>M$



$0<f(\bar{x})<\varepsilon$

$\Rightarrow 0=\inf(f)$.

Se avesse massimo $\Rightarrow \exists\, M$ t.c. $f(x)\le M \quad \forall x\in(0,+\infty)$

$f(x)>0 \;\forall x \Rightarrow 0$ è un minorante $0=\inf(f)$

$\operatorname{Im}_{x>0}\dfrac{1}{x}=(0;+\infty)$

Se f avesse minimo allora dovrebbe essere

$$\min(f) = \inf(f) = 0$$

$\Rightarrow$ dovrebbe esistere x_0 t.c. $f(x_0) = 0$

cioè $\frac{1}{x_0} = 0$ impossibile.

Esempio: $$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Esercizio: è limitata?

ha massimo?

ha minimo?

trovare $\sup f$ ed $\inf f$

Oss: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$.

a) Se A ha massimo e f è debolmente crescente, allora f ha max e

$$\boxed{\max_A(f) = f(\max(A))}$$

b) Se A ha minimo e f è deb. crescente allora f ha minimo e

$$\boxed{\min_A(f) = f(\min(A)).}$$

NON È VERO IN GENERALE (per f deb cresc)
(HA SENSO)

$$\sup f = f(\sup A)$$

$$\inf f = f(\inf A)$$

c) Se A ha max e f è deb. decrescente allora f ha minimo e

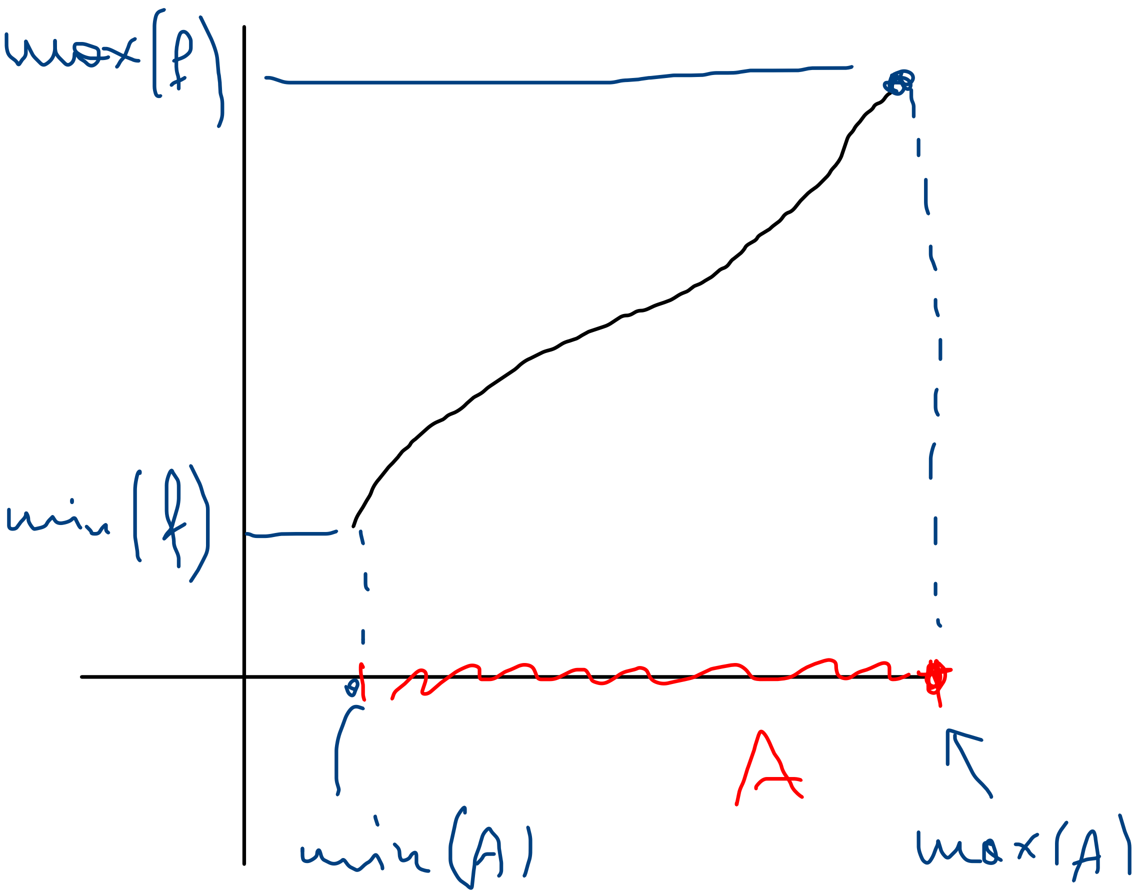
$$\min(f) = f(\max(A))$$

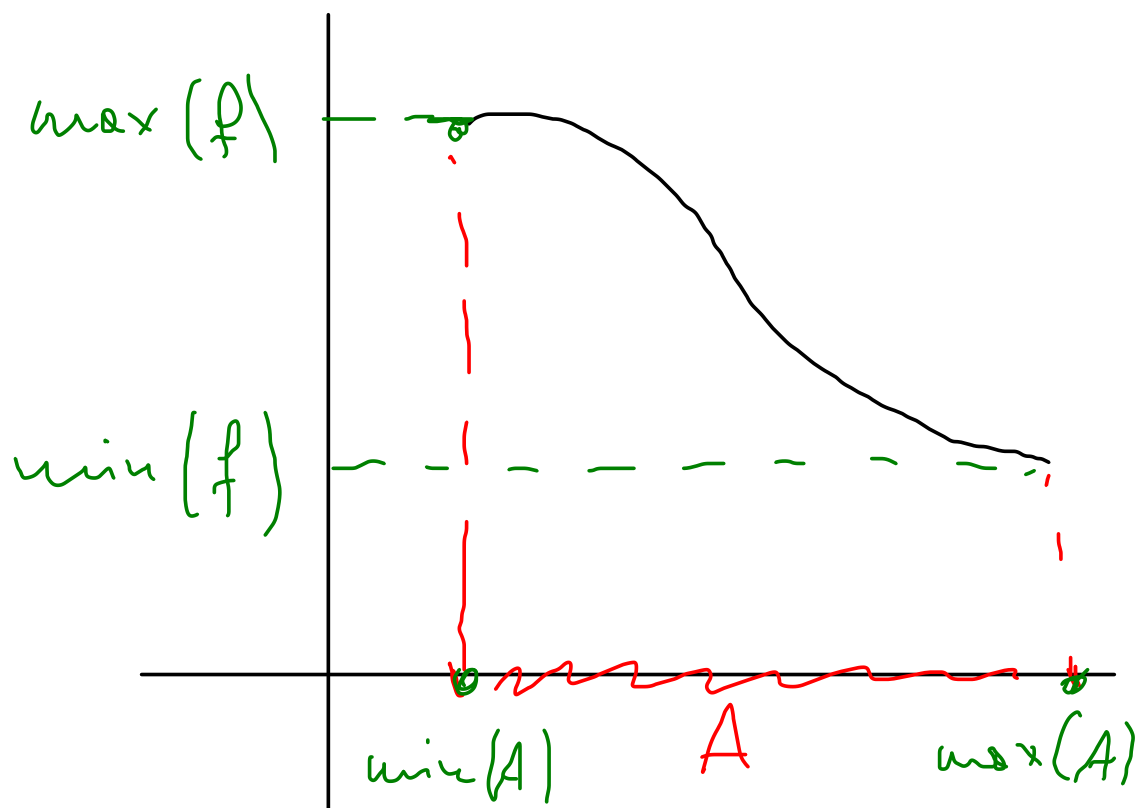
d) Se A ha minimo e f è deb. decrescente allora f ha massimo e

$$\max(f) = f(\min(A)).$$

Osservazione: se f è deb. cresc. (decr.) e il dominio A di f non ha massimo, ma $\sup A < +\infty$, non è detto che $\sup f < +\infty$ $(\inf f > -\infty)$

e.g. $f(x) = \frac{1}{x} : [-1; 0) \longrightarrow \mathbb{R}$.


max(f)
min(f)
min(A)
A
max(A)

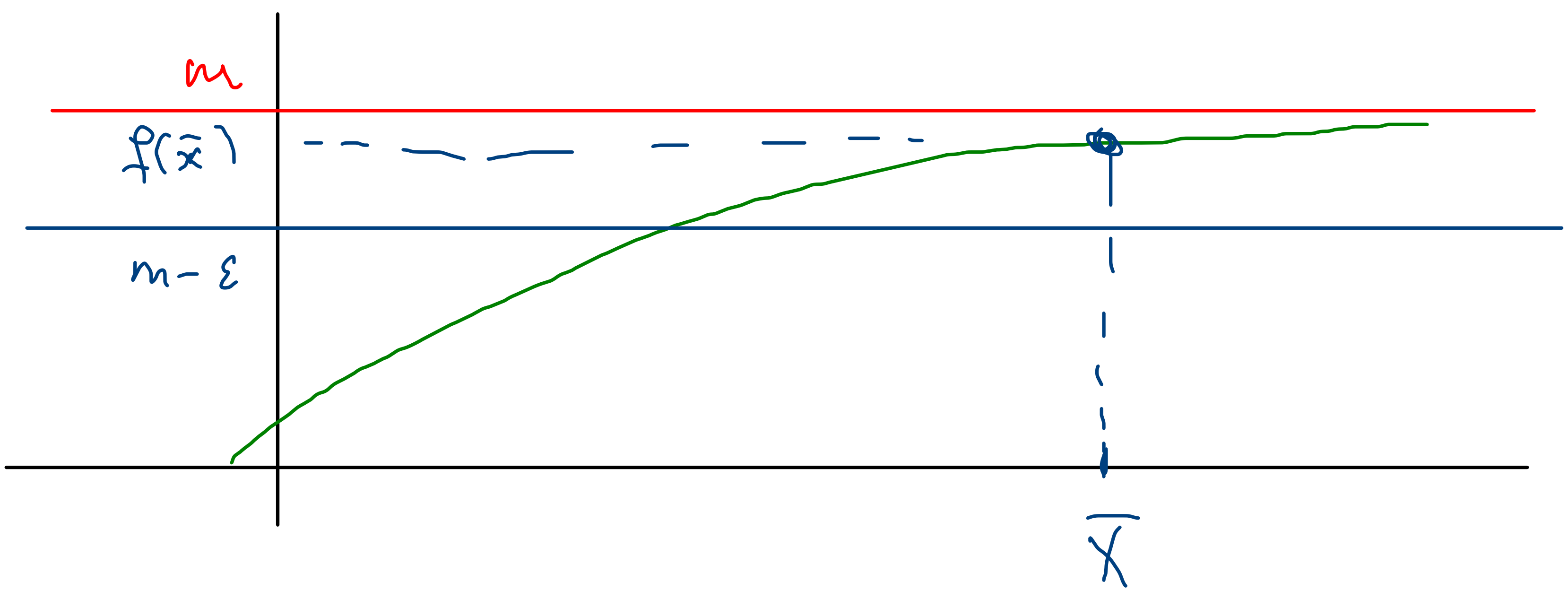

max(f)
min(f)
min(A)
A
max(A)

Oss: $f: A \to \mathbb{R}$ allora $m = \sup(f)$

se e solo se valgono

1) $f(x) \le m \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) > m - \varepsilon$



Es: $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad a_n = \frac{1}{n+1}$

è decrescente $\quad \inf a_n = 0$

Valore assoluto

Def: Data $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x e si indica con $|x|$ il numero

$$|x| = \max\{x, -x\}.$$

Es: $|5| = \max\{5, -5\} = 5$

$|-3| = \max\{-3, -(-3)\} = 3$

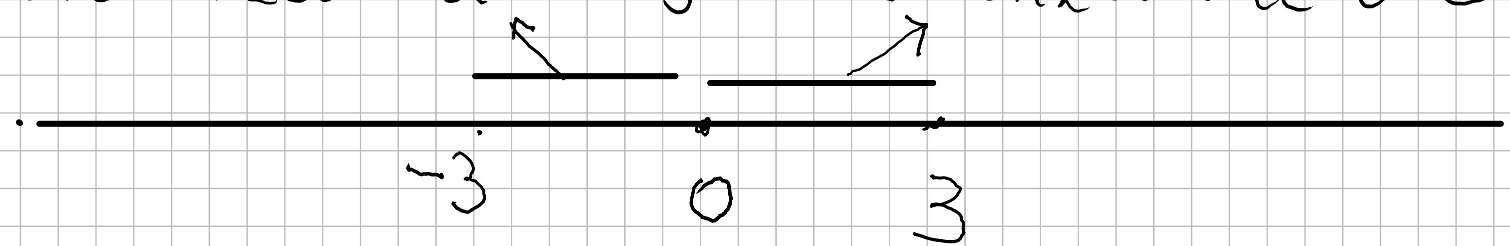
$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases} = \sqrt{x^2}$$

NOTA: $\boxed{\text{non asserire}}$ che il valore assoluto è il numero "senza segno"!!

Osservazione: identificando $\mathbb{R}$ con la retta, e quindi $0 \in \mathbb{R}$ con un'origine, e ogni numero reale con un punto di essa (e viceversa),

si può interpretare $|x|$ come misura numerica della distanza tra 0 e x:

distanza tra 0 e -3 = distanza tra 0 e 3



Osservazione: $|a-b|$ si può quindi interpretare come distanza tra a e b

Proprietà di $|x|$.

1) $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad -x \leq |x|$

2) $|x| = x$ se $x \geq 0$, $|x| = -x$ se $x \leq 0$

3) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

4) $|x| = 0 \iff x = 0$

5) $|-x| = |x|$ $\qquad$ perché $-(-x) = x$

6) $-|x| \leq x \leq |x|$ $\qquad x \in [-M; M] \iff |x| \in [0, M]$

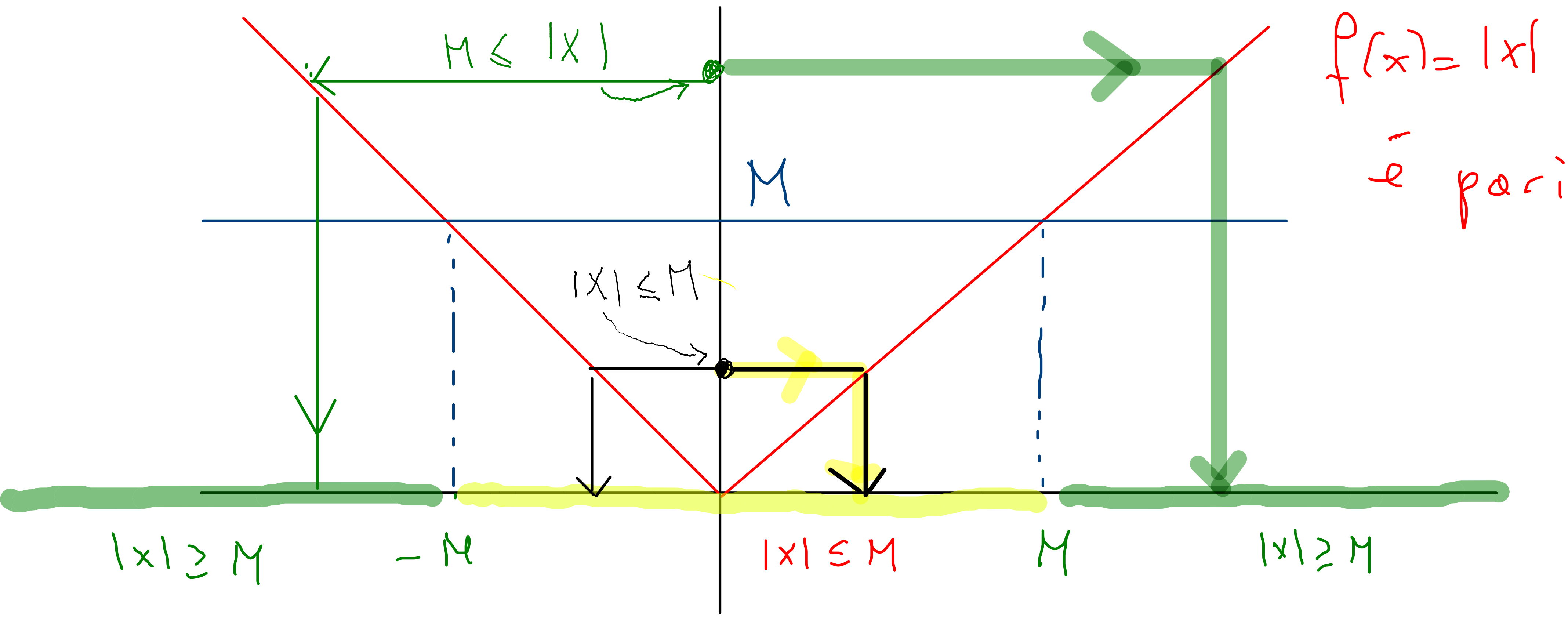
7) $|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M \quad (M \geq 0)$

8) $|x| \geq M \iff x \geq M$ oppure $x \leq -M$.

$(M \geq 0)$ $\qquad x \in (-\infty; -M] \cup [M; +\infty)$

$\Updownarrow$

$|x| \in [M; +\infty)$



$|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M$

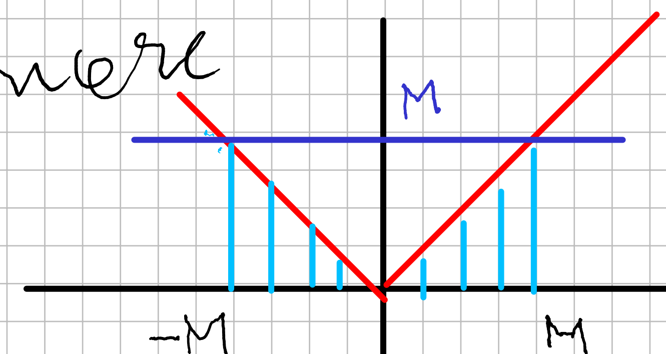
$|x| \geq M \iff x \leq -M$ oppure $x \geq M$.

Oss.: abbiamo risolto graficamente (dato $M>0$)

$|x| \le M$ e $|x| \geq M$,

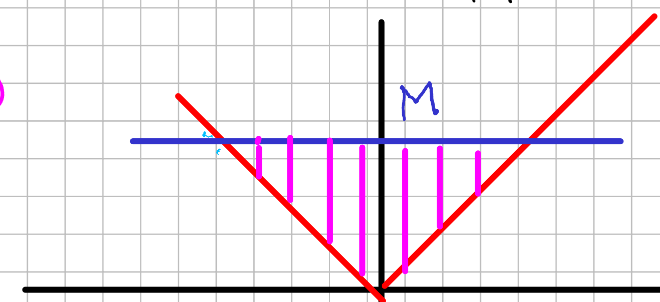
cioè abbiamo messo in risalto sul dominio (asse orizzontale) le soluzioni delle due disequazioni.

Ben diverso sarebbe disegnare



$\{(x,y) : 0 \le y \le |x| \le M\}$

o $\{(x,y) : M \ge y \ge |x|\}$



che sono sottoinsiemi del piano non dell'asse orizzontale.

Oss: Se $M<0$ $|x| \geq M$?

quali sono le soluzioni di $|x| \geq -3$?

ogni $x \in \mathbb{R}$

---

le soluzioni di $|x| \leq -3$?

nessun $x \in \mathbb{R}$ non ha soluzione

Disuguaglianza triangolare

Dati $a, b \in \mathbb{R}$ risulta che

1) $|a+b| \leq |a| + |b|$ $\qquad |a-b| \leq |a| + |b|$

2) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

dim 1): $\qquad -|a| \leq a \leq |a|$ $\qquad$ sommo le disuguaglianze

$\qquad -|b| \leq b \leq |b|$

$$-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$$

$$\underbrace{-(|a| + |b|)}_{-M} \leq \underbrace{a+b}_{x} \leq \overbrace{(|a| + |b|)}^{M}$$

$\rightarrow$ $|x| \leq M$

cioè

$|a+b| \leq |a| + |b|$.

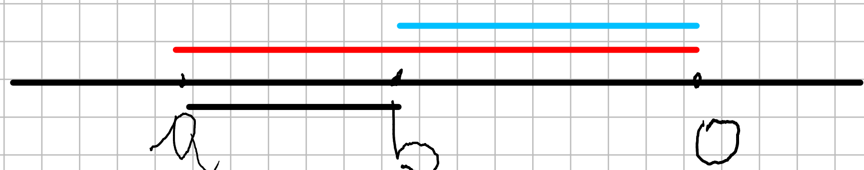
Osservazione: un terzo modo di scrivere la diseguaglianza triangolare è

3)
$$|a-b| \le |a| + |b|$$

$$|a-b| = |a+(-b)|, \qquad |a| = |a|, \qquad |b| = |-b|$$

cioè geometricamente

la distanza da percorrere per andare da a a b non è più grande di quella per andar da a a 0 e quindi da 0 a b



Oss: $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

perché?
$$|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq |a+b|+|c| \leq$$
$$\leq |a|+|b|+|c|.$$

Vale anche con più elementi

$$|a_1+a_2+a_3+ \dots + a_n| \leq |a_1|+|a_2|+|a_3|+ \dots +|a_n|.$$

NOTAZIONE:

- dati n numeri $a_1, a_2, \dots a_n$, la somma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ si indica con

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

- Si ha $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n$$

- Quindi $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$