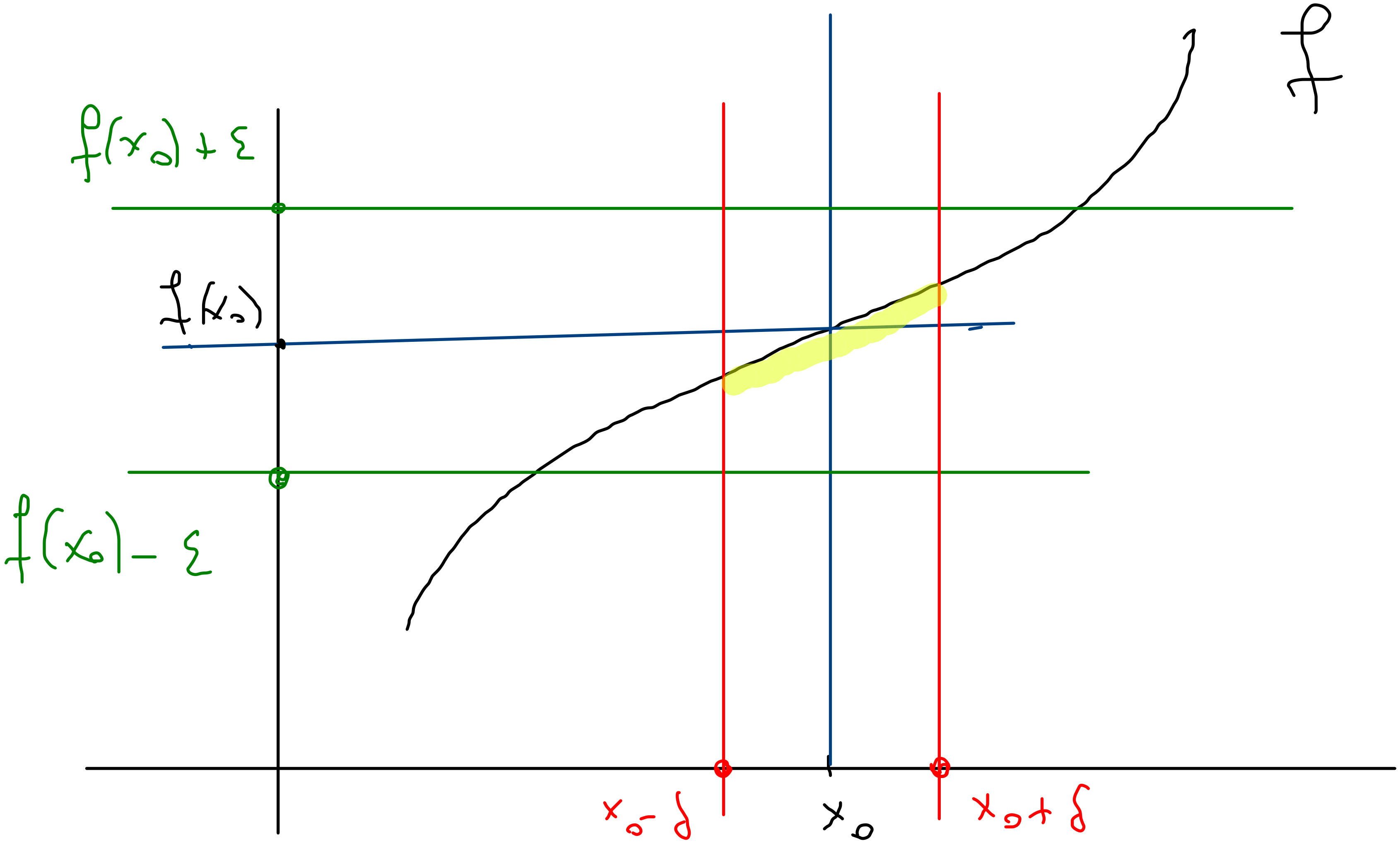
Continuità

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. La funzione f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$x \in A, \; |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$|x - x_0| < \delta \iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

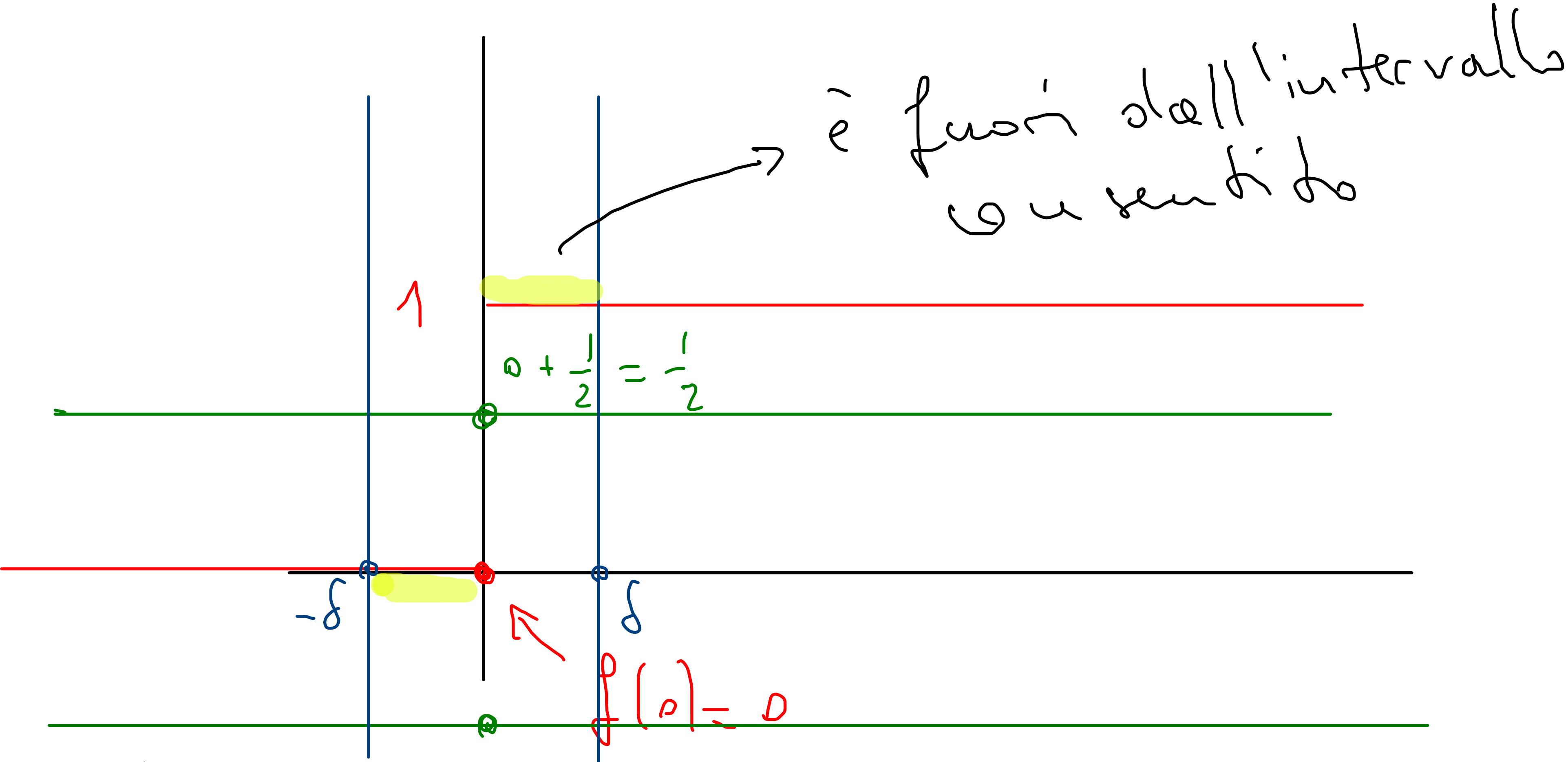


f
$f(x_0)+\varepsilon$
$f(x_0)$
$f(x_0)-\varepsilon$
$x_0-\delta$
x_0
$x_0+\delta$

Esempio di funzione non continua in un punto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 0$



$0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$f(0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2}$, $f(0) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$

qualunque sia $\delta > 0$ se $x \in (0, \delta)$

$\Rightarrow f(x) = 1$ quindi la disuguaglianza

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$$

che diventa

$$0 - \frac{1}{2} < f(x) < 0 + \frac{1}{2}$$ è falsa

$$\Downarrow$$

$$1 < \frac{1}{2} \quad \text{se } x \in (0, \delta)$$

$\Rightarrow f$ non è continua in $x_0 = 0$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$

Si dice che f è continua in B se f è continua in ogni punto $x_0 \in B$.

Se dico semplicemente che f è continua (senza specificare il sottoinsieme B) vuol dire che f è continua in tutti i punti del suo dominio A.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

f è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Permanenza del segno

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$ allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $x \in A$ e $|x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$.

Analogo risultato se $f(x_0) < 0$.

<u>dim</u>: Sappiamo che $f(x_0) > 0$. Scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ e lo uso nella definizione di continuità.

Allora $\exists\, \delta > 0$ t.c.

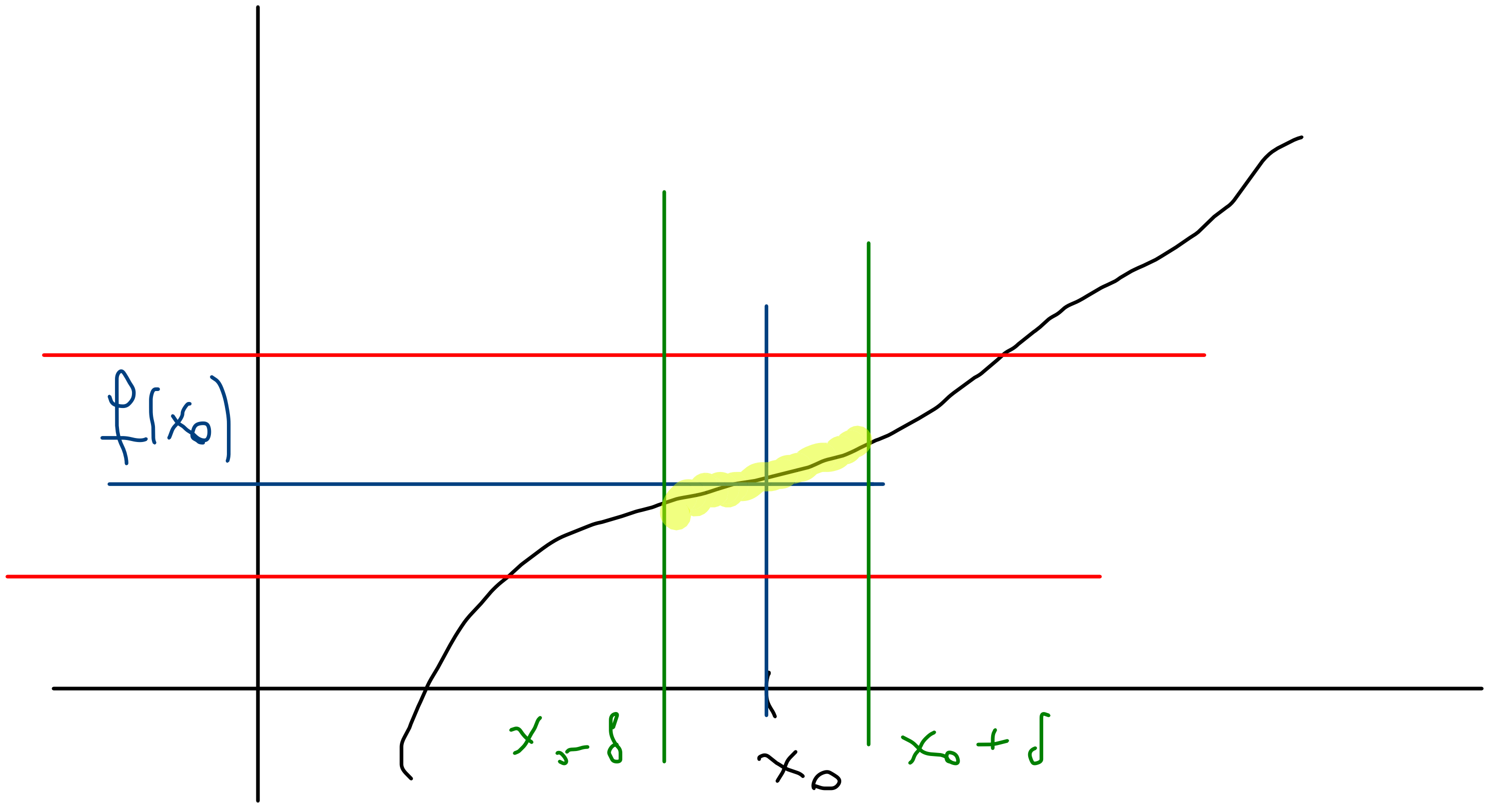
$$x \in A, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

cioè

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

$\square$



f(x0)
x0 - δ
x0
x0 + δ

<u>Corollario</u>: Se f è continua in x_0

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$

allora $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

(vale anche con $f(x_0) < M \Rightarrow f(x) < M$).

<u>dim</u>: applico il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - M$.

$\square$

Teorema: Se f e g sono continue in x_0 allora lo sono anche le funzioni $f+g$, $f \cdot g$, $|f|$. Se inoltre $f(x_0) \neq 0$ allora anche $\frac{1}{f}$ è continua.

Corollario: $\frac{f}{g}$ è continua (se $g(x_0) \neq 0$).

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}.$$

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to B \subset \mathbb{R}$
Se f è continua in I ed è invertibile allora f^{-1} è continua in B.

Osserviamo che l'ipotesi che il dominio sia un intervallo non può essere omessa.
Vediamo un esempio

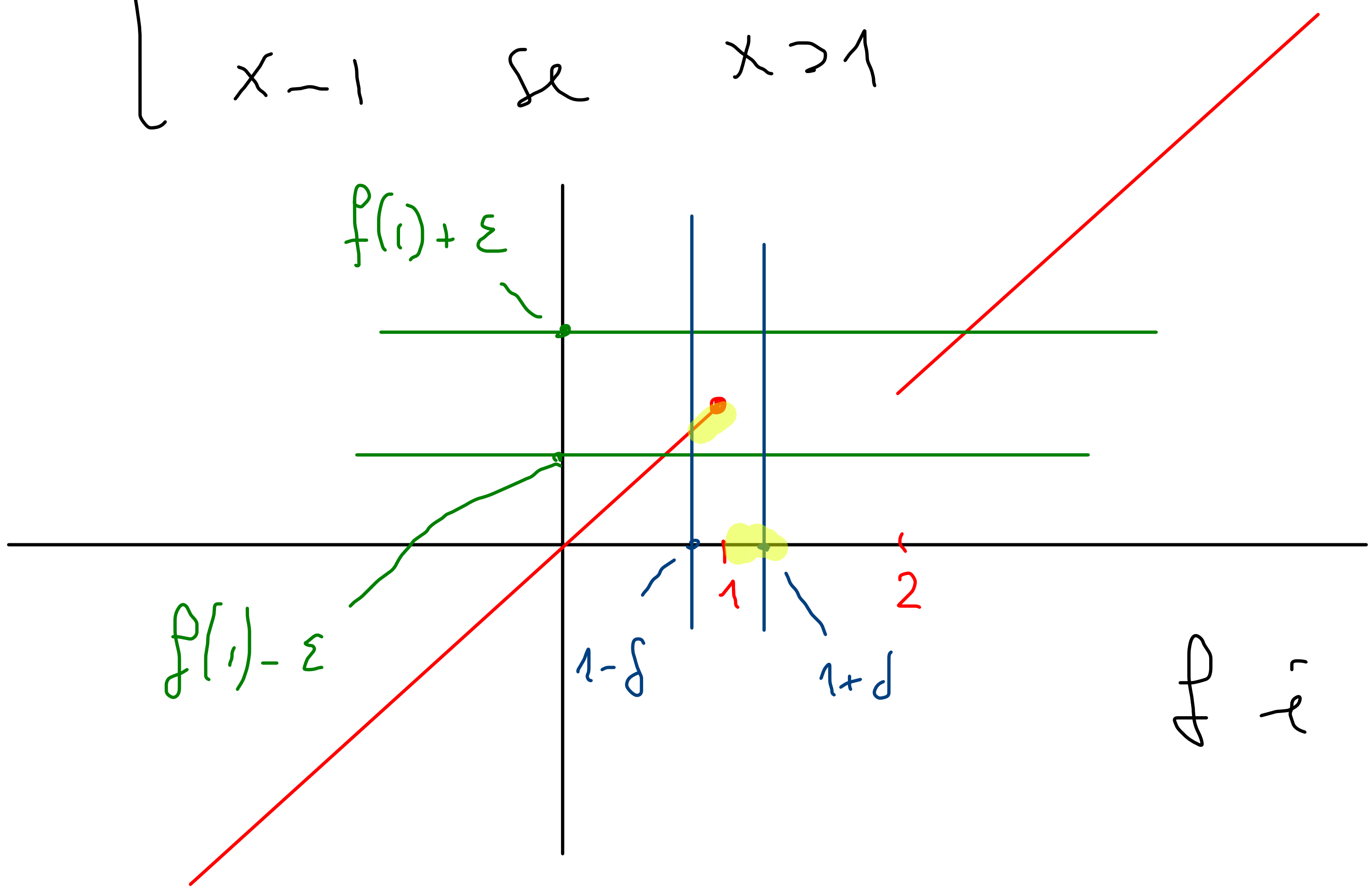
$$f : \boxed{(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

non è un interv.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$|x - x_0| < \delta$

$x \in A$



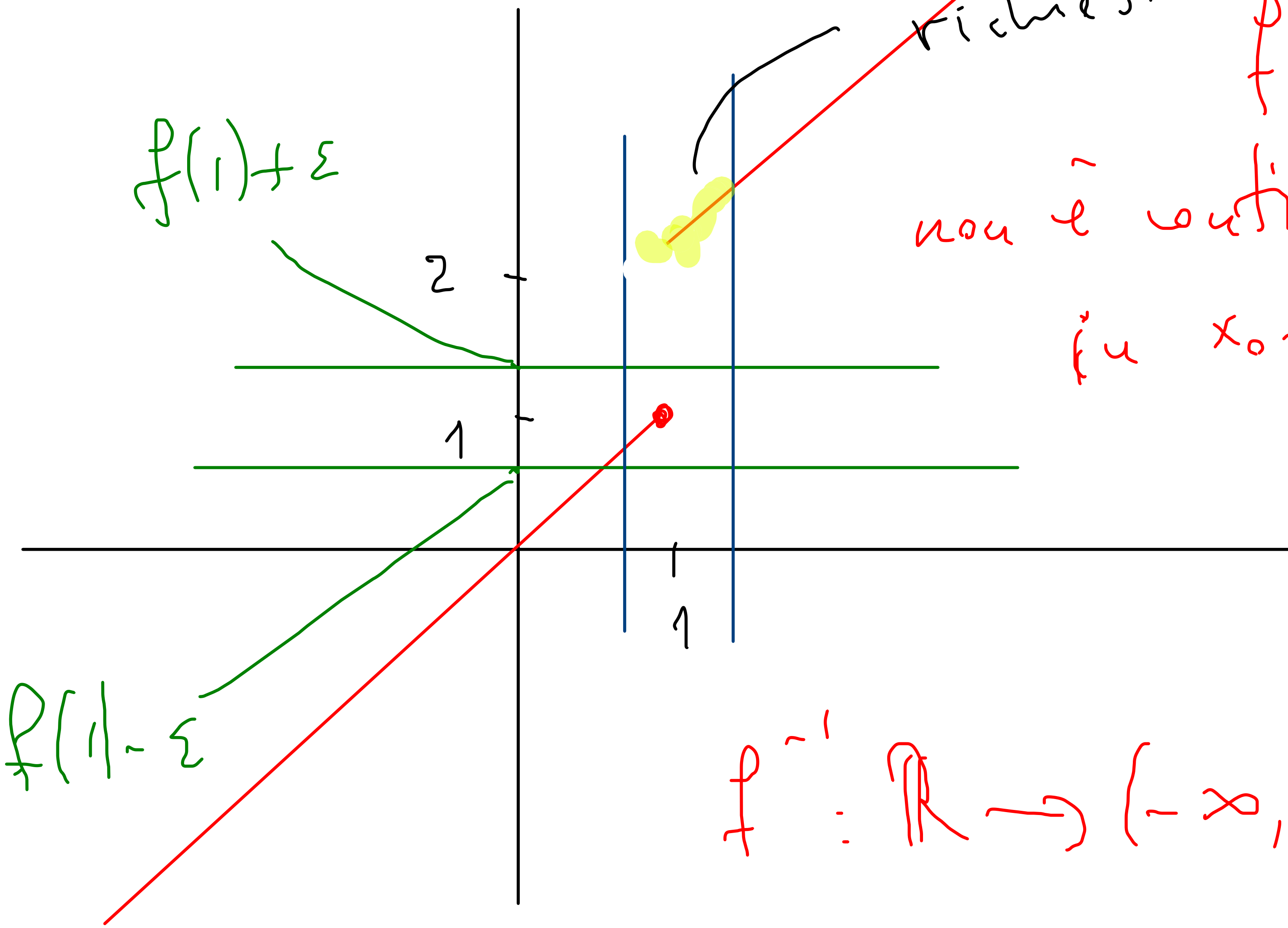
f è continua?

non ha senso domandarsi se la funzione è continua in $x_0 = 2$ perché il punto non è nel dominio della f.

In $x_0 = 1$ è continua. Allora f è continua in tutto il suo dominio.

Disegniamo f^{-1}

non è nell'intervallo richiesto.



f^{-1}

non è continua in $x_0 = 1$.

$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$

Se f non è definita su un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f è continua.

Continuità delle funzioni elementari

$f(x) = x$ è continua.

da questo segue che tutti i polinomi

Sono continui.
(mi serve anche sapere che le funzioni costanti sono continue).

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$x^2 = x \cdot x \Rightarrow$ continua

$x^3 = x^2 \cdot x \Rightarrow$ continua

$\dots$ x^n è continua $\forall n \in \mathbb{N}$.

Le funzioni razionali sono continue nel loro insieme di definizione.

Funzione razionale = quoziente di polinomi

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad , p, q \text{ polinomi.}$$

è definita se $q(x) \neq 0$.

Assumeremo che

e^x, $\sin x$, $\cos x$ sono funzioni continue.

Quindi anche

$\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$.

Teorema: $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$.

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora $g \circ f$ è continua in x_0.

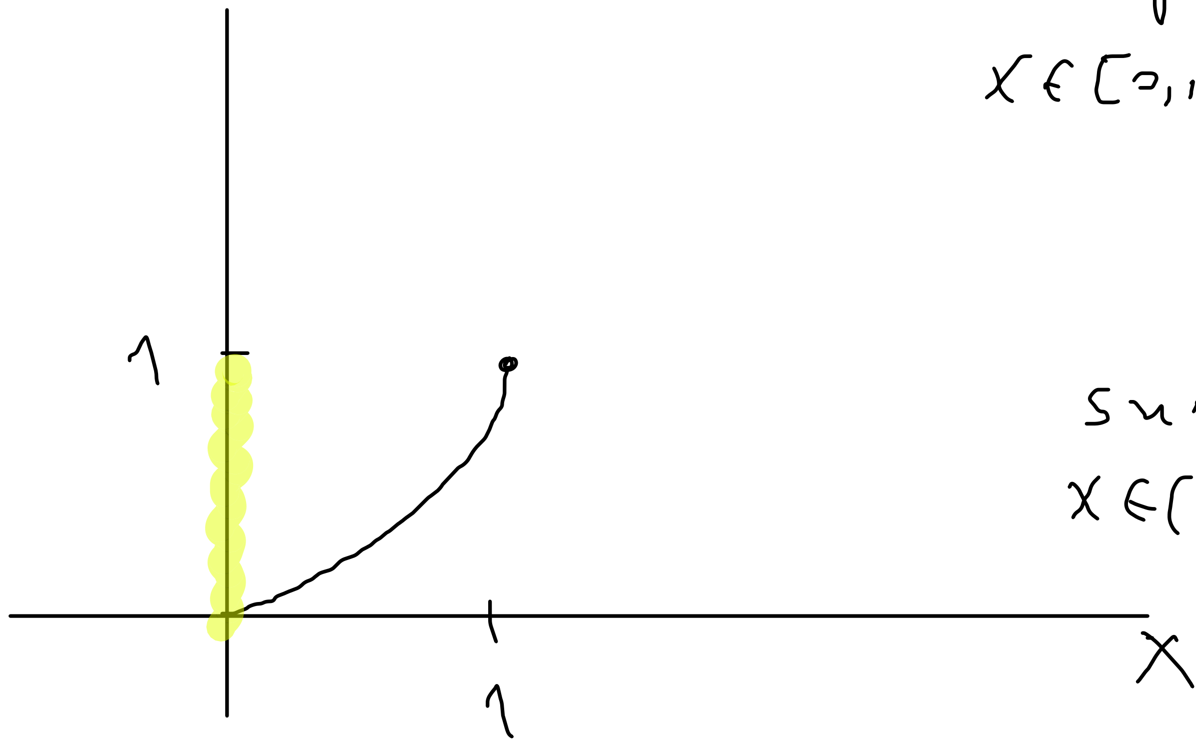
Es: $e^{\cos x}$ è una funzione continua. È la composizione di $f(x) = \cos x$ e $g(y) = e^y$.

Oss: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora

$$\sup_{x\in(a,b)} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

$$\inf_{x\in(a,b)} f(x) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Es: $f(x) = x^2$ $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$



$$\sup_{x \in [0,1]} f(x) = f(1) = 1.$$

è anche un max

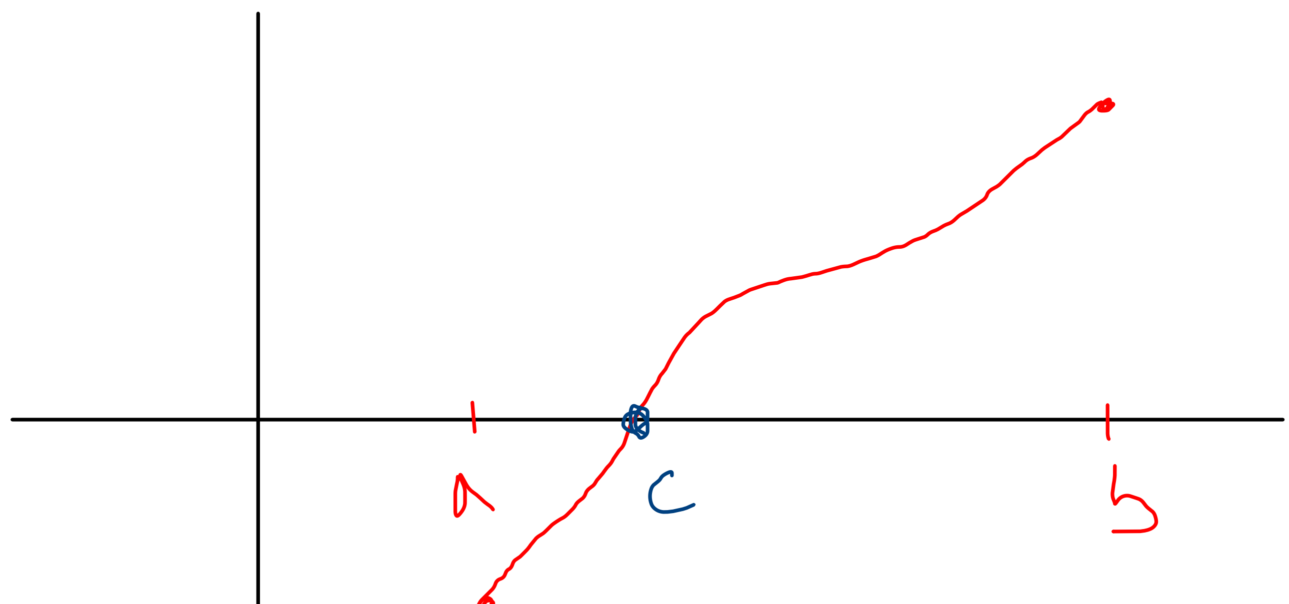
$$\sup_{x \in (0,1)} f(x) = \sup \mathrm{Im}(f) = \sup (0,1) = 1$$

Teorema degli zeri

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

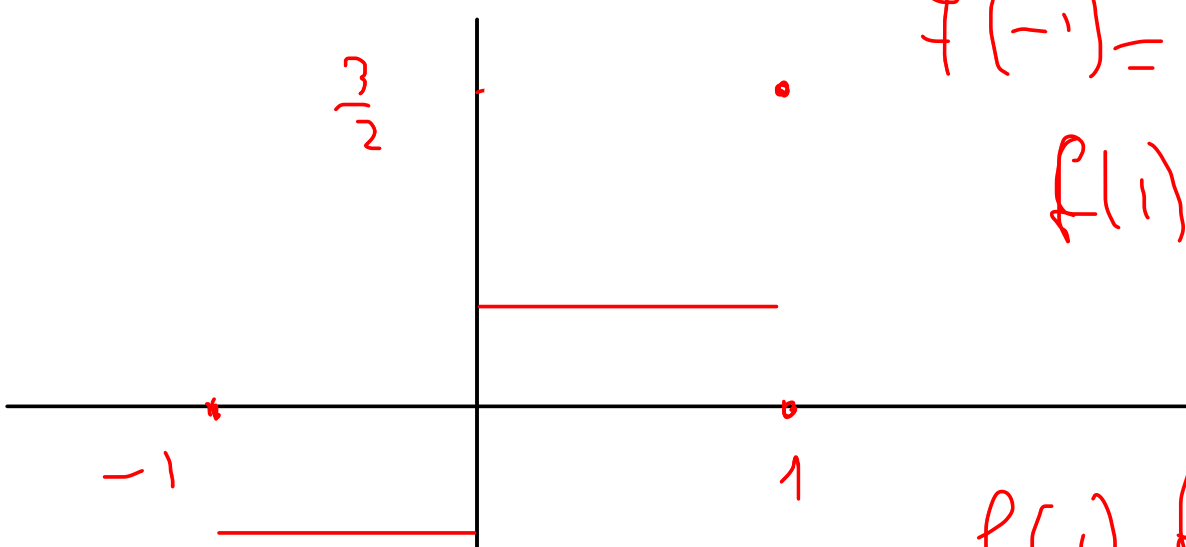
f ha segno discorde negli estremi



L'ipotesi di continuità è necessaria.

Infatti

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2} \qquad f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2} = [1] + \frac{1}{2}$$

$$f(1) \cdot f(-1) < 0$$

ma $\nexists\ c \in [-1, 1]$ t.c. $f(c) = 0$

Teorema dei valori intermedi

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.
Allora $f(I)$ è un intervallo

(l'immagine di f).

Corollario: $I \subset \mathbb{R}$, intervallo, f continua.
Se f assume i valori y_1 e y_2 allora assume anche tutti i valori compresi fra y_1 e y_2.

Teorema di Weierstrass.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo.

$a, b \in \mathbb{R}$ cioè $a, b \neq \pm\infty$.

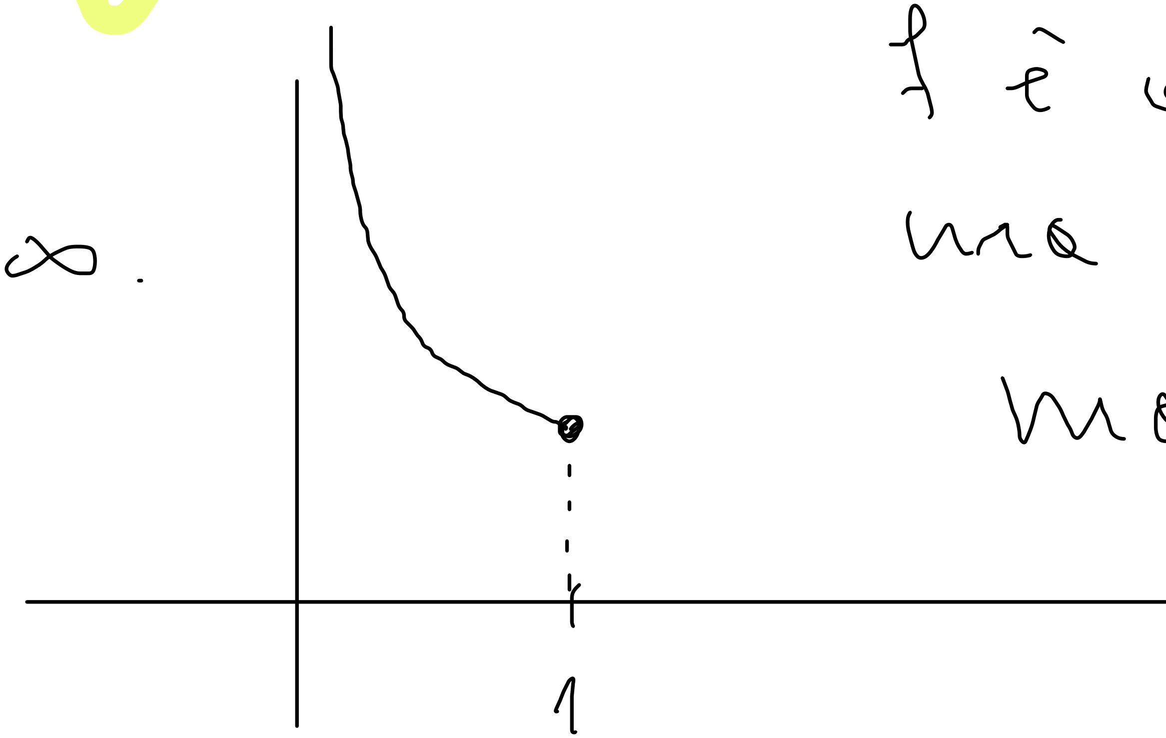
e gli estremi sono compresi.

Perché $[a,b]$ deve essere limitato e chiuso?

Es: $f:(0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x}$

f è continua ma non ha max.

$\sup(f)=+\infty$.

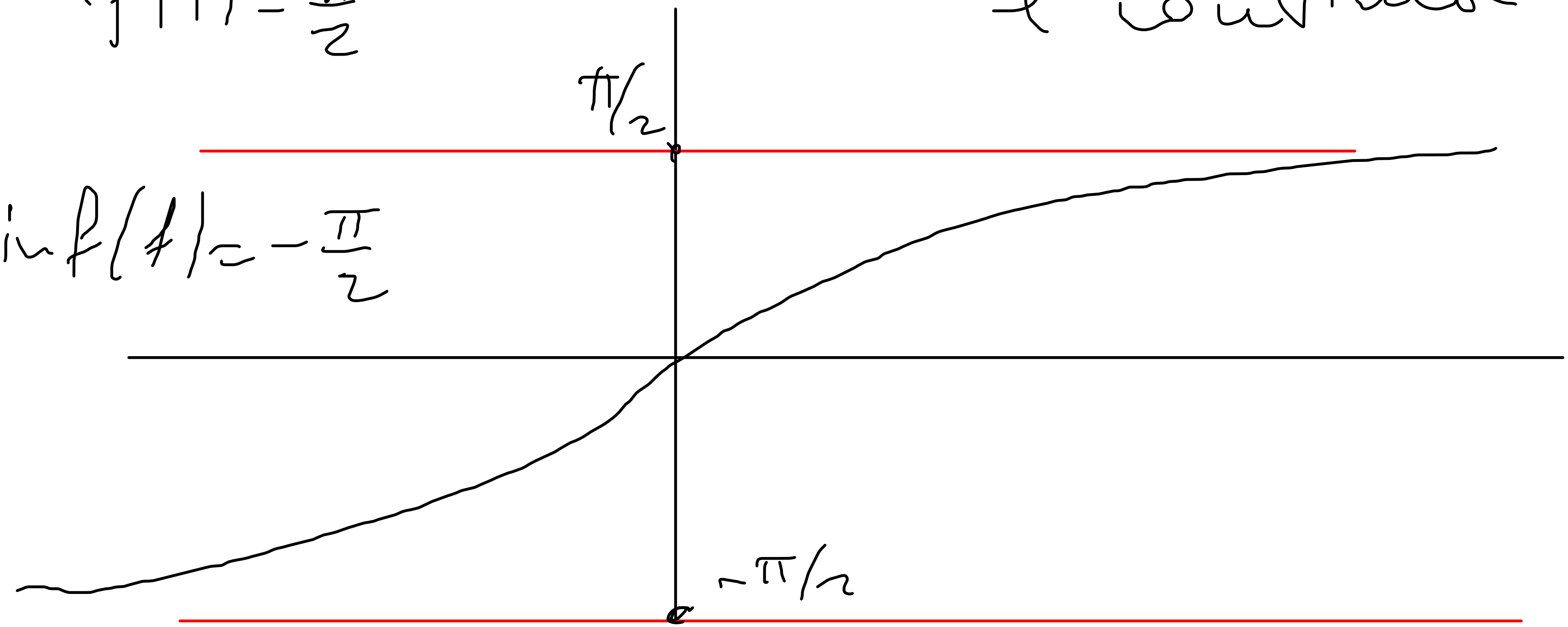


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f(x) = \operatorname{arctg} x$

è continua

$\sup(f) = \frac{\pi}{2}$

$\inf(f) = -\frac{\pi}{2}$



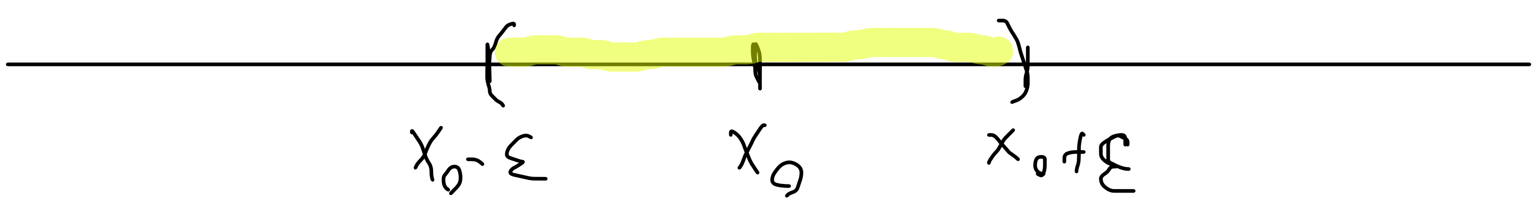
$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ ma manca né max né min.

Intorni.

Def.: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice intorno di x_0 un insieme del tipo

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad \text{dove } \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0.$$

ε si dice raggio dell'intorno.



Un insieme del tipo $[x_0, x_0+\varepsilon)$ si dice intorno destro di x_0.

Un insieme del tipo $(x_0-\varepsilon, x_0]$ si dice intorno sinistro di x_0.

Def: Se $x_0 = +\infty$ un intorno di x_0 è un insieme del tipo $(a, +\infty)$ dove $a \in \mathbb{R}$

semiretta.

Un intorno di $-\infty$ è un insieme del tipo $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$.

semiretta

intorno di $+\infty$

Def: Data $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall\, V$ intorno di x_0 risulta

$$V \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

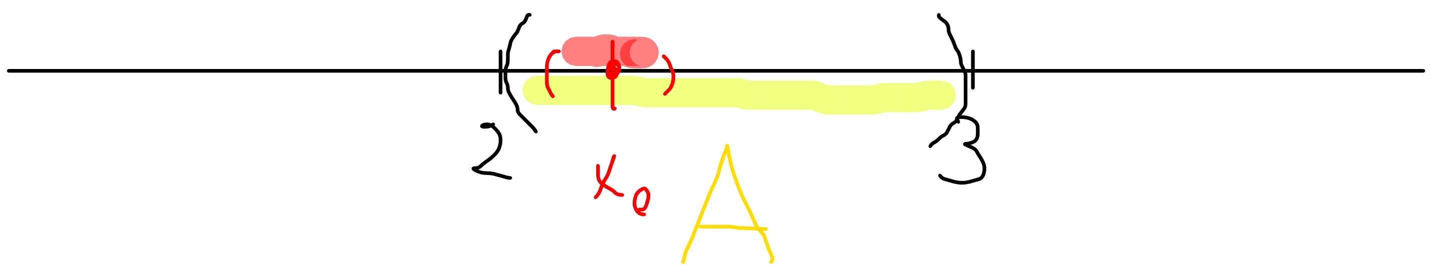
Vuol dire che "vicino" a x_0 ci sono altri punti di A oltre a x_0 (x_0 potrebbe anche non appartenere ad A).

Es: $A = (2,3)$.

$Acc(A) = \{$punti di accumulazione di $A\} = ?$

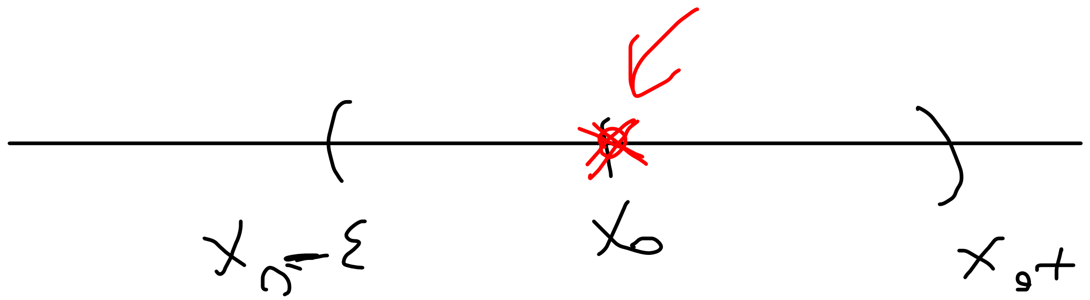
$x_0 \in (2,3)$

ogni intorno di x_0 interseca A in infiniti punti



$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$ si chiama anche intorno bucato

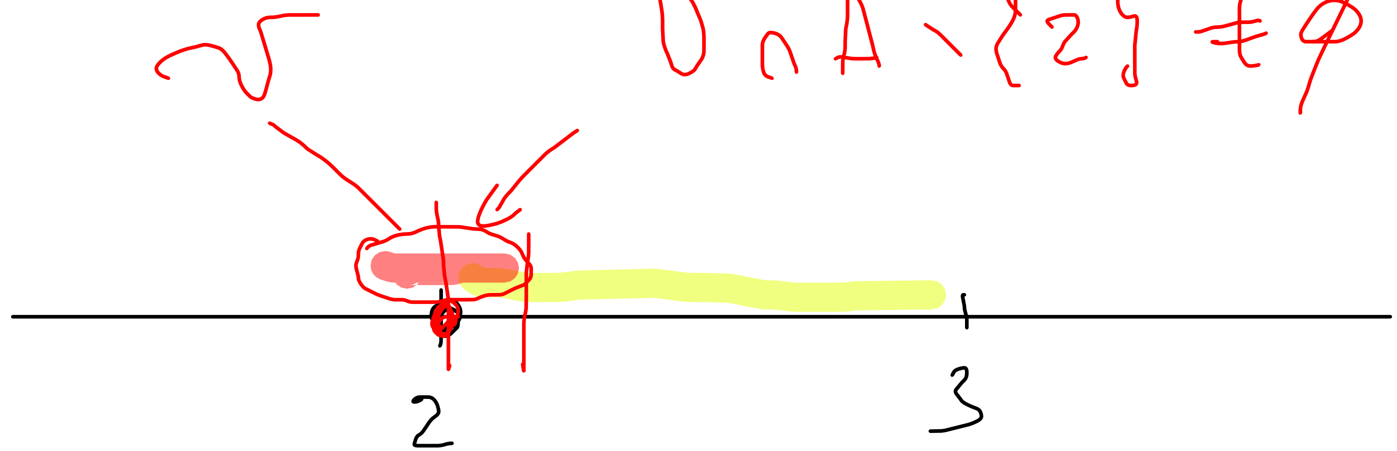
non c'è



$\Rightarrow \quad (2,3) \subset Acc(A)$.

ce ne sono altri?

$V \cap A \setminus \{2\} \neq \emptyset$

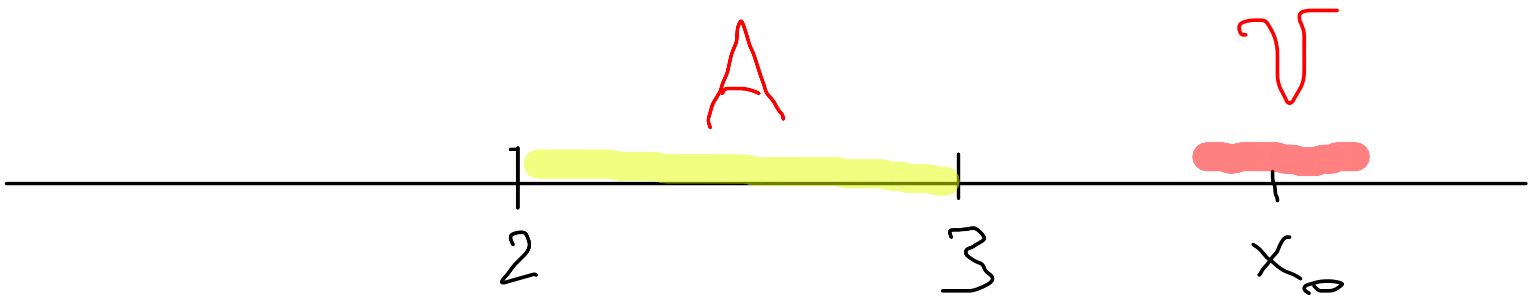


$x_0 = 2$ è di accumulazione? Sì

lo stesso per $x_0 = 3$.

$\Rightarrow [2,3] \subset Acc(A)$

ce ne sono altri? NO.



$$V \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Acc}(A) = [2, 3]$$

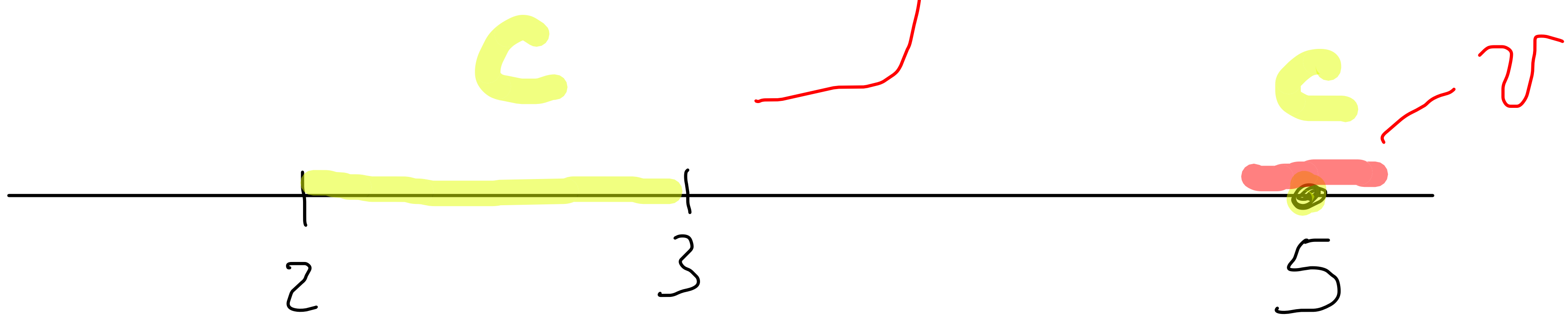
$B = [2,3] \qquad Acc(B) = ?$

$Acc(B) = [2,3]$

$U \cap C = \{5\}$

$U \cap C \setminus \{5\} = \emptyset$

$C = (2,3) \cup \{5\}$



$Acc(C) = ? \qquad 5 \notin Acc(C)$

$Acc(C) = [2,3]$.

Def: un punto $x_0 \in A$ si dice punto isolato di A se esiste V intorno di x_0 t.c. $V \cap A = \{x_0\}$.

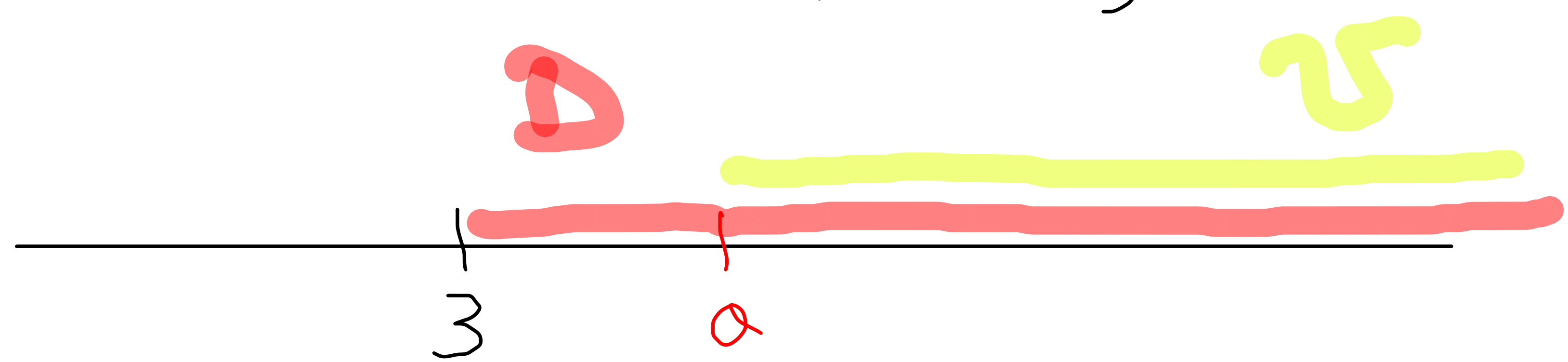
Es: $A = [2,3] \cup \{5\} \Rightarrow 5$ è punto isolato di A.

Es: $D = (3, +\infty)$

$Acc(D) = ?$ $\qquad (3, +\infty) \subset Acc(D)$

$+\infty$ è punto di accumulazione per D?

Verifichiamo. Prendiamo V intorno di $+\infty$. Quindi $V = (a, +\infty)$



definiamo $b = \max\{3, a\}$

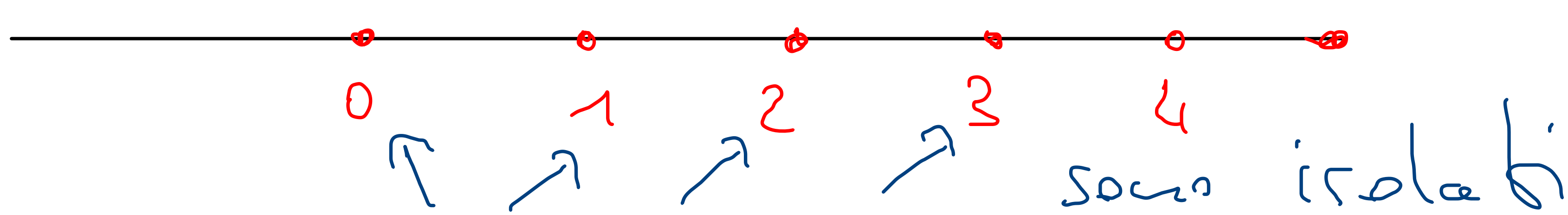
$$D \cap V \setminus \{x_0\} = (3,+\infty) \cap (a,+\infty) \setminus \{+\infty\} =$$

$$= (b,+\infty) \neq \emptyset .$$

$\Rightarrow$ $+\infty$ è punto di accumulazione per D

$$Acc(D) = [3,+\infty].$$

Es: $E = \mathbb{N}$ $\qquad Acc(\mathbb{N}) = ?$

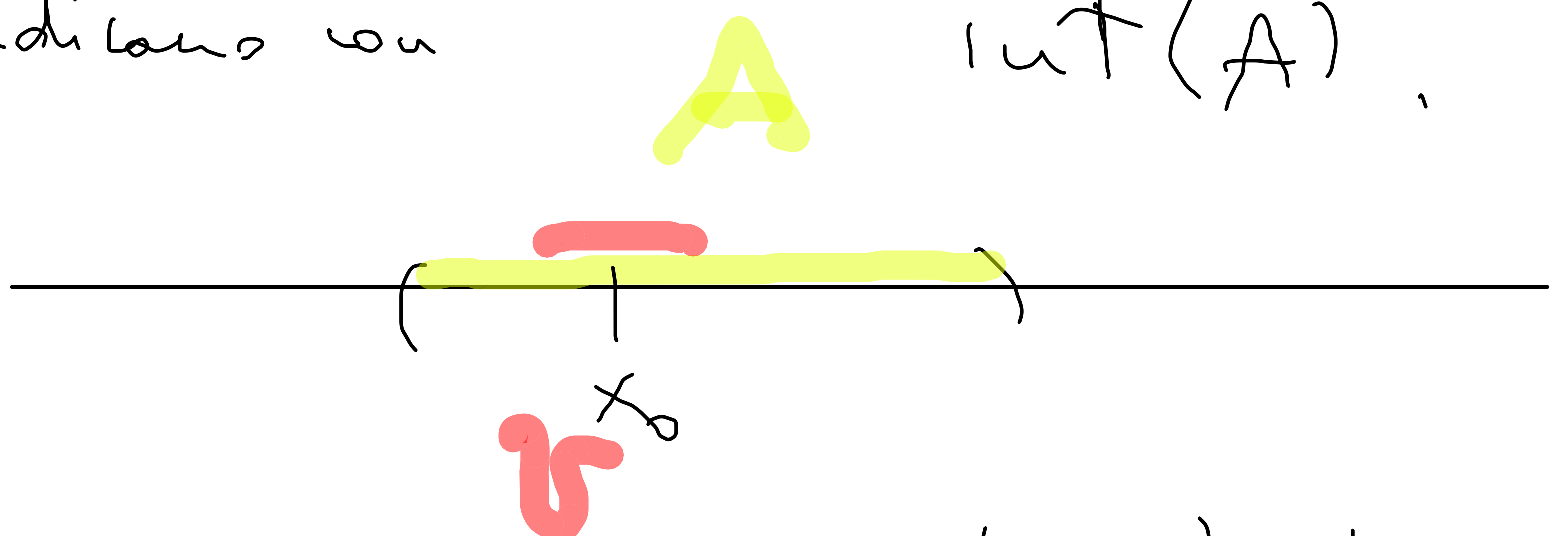


tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono punti isolati
quindi non sono di accumulazione.
$+\infty$ è l'unico punto di accumulaz.
per $\mathbb{N}$

$$Acc(\mathbb{N}) = \{+\infty\}.$$

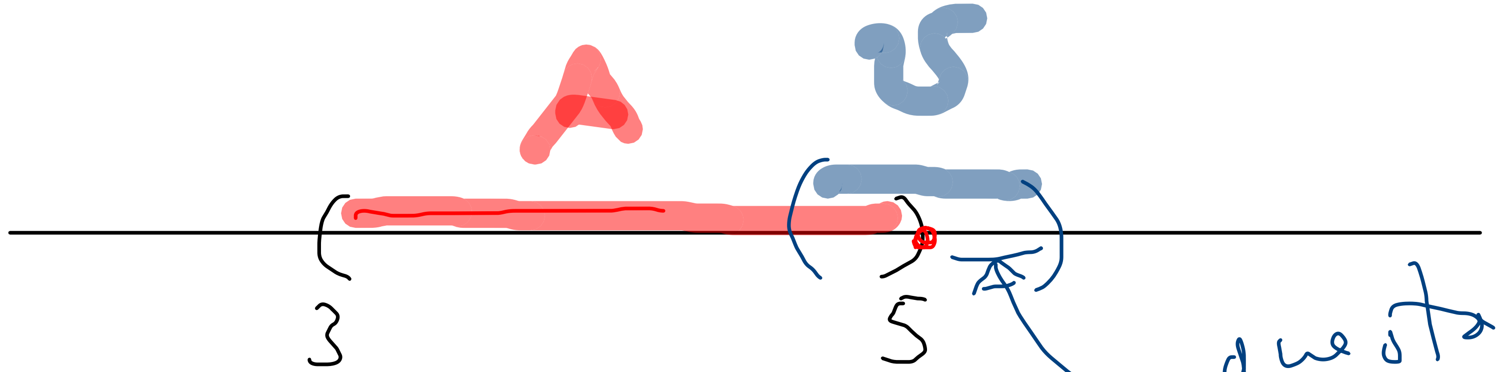
$$Acc(\mathbb{Z}) = \{-\infty, +\infty\}.$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se esiste U intorno di x_0 t.c. $U \subset A$. I punti interni si indicano con $\mathrm{int}(A)$.



Es: $A = [3,5] \Rightarrow$ punti interni ad A sono $(3,5)$

$\mathrm{int}([3,5]) = (3,5)$.



questa parte non è in A.

dovrei trovare un intorno di 5 che è tutto contenuto in A.