ALLINEAMENTI DECIMALI (INFINITI)

cfr. esercizi 4, 5 e 6 degli esercizi a risposta aperta della II settimana

- **Es. 5** $\quad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

- per $a=1$, $b=x\neq 1$ $\quad \dfrac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \dots + x^{k-1} + \dots + x^{n-1}$

$$1\cdot(1+x+\dots+x^{n-1}) = \boxed{1} + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1}$$
$$-x\cdot(1+x+\dots+x^{n-1}) = -x - x^2 - x^3 - \dots - x^{n-1} \boxed{-x^n}$$
$$= 1 - x^n$$

- **Es. 4** $\quad$ per semplicità ci si limita al caso $\underline{0<x<1}$ (*).

caso $x=\frac{1}{2}$: 4b), poiché $2^{n+1} = 2\,2^n = 2^n + 2^n \geq 2^n + 1$

se $2^n \geq n$ si ha $2^{n+1} \geq n+1$. Poiché $2^0 = 1 \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n \geq n$

4c) Quindi $\forall n \geq 1 : \dfrac{1}{2^n} \leq \dfrac{1}{n}$. Poiché $\inf\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}, n\geq 1\} = 0$

anche $\inf\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Per caratterizzazione di inf

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \dfrac{1}{2^{\bar{n}}} < \varepsilon$; ma $\dfrac{1}{2^n}$ è decrescente

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \ \forall n \geq \bar{n} \quad \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$.

caso generale $0<x<1$

(Dis. Bernoulli) Lemma $\forall z>-1, \forall k\in\mathbb{N} \quad (1+z)^k \geq 1+kz$

DIM. Per induzione: 1) $(1+z)^0 = 1 \geq 1 = 1+0z$;

2) se è vera $(1+z)^k \geq 1+kz$ allora è vera $(1+z)^{k+1} \geq 1+(k+1)z$, infatti

$$(1+z)^{k+1} = (1+z)^k \underset{\geq 0}{(1+z)} \geq (1+kz)(1+z) = 1+kz+(1+kz)z = 1+kz+z+\underset{\geq 0}{kz^2} \geq 1+kz+z$$

Se $0<x<1$ è $\frac{1}{x} = 1+\left(\frac{1}{x}-1\right) > 1$, $z =: 1-\frac{1}{x} > 0 > -1$, quindi

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n \geq 1+n\left(\frac{1}{x}-1\right) = 1+n\frac{1-x}{x} > 1$$

$$0 < x^n \leq \frac{1}{1+n\frac{1-x}{x}} < \frac{1}{n}\cdot\frac{x}{1-x} \qquad n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$$

Poiché se $\alpha\geq 0$ $\inf\{\alpha y : y\in A\} = \alpha\cdot\inf A$, si ha $\alpha = \frac{x}{1-x} > 0$

$$0 \leq \inf\{x^n : n\in\mathbb{N}\} = \inf\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{x}{1-x} : n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\} = \frac{x}{1-x}\inf\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}, n\geq 1\right\} = 0$$

Essendo $x^{n+1}\leq x^n$ decrescente $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}\quad x^n\leq\varepsilon$.

Es. 6: per l'Es 5 $1+x+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}$ per $0<x<1$

per l'Es. 4d $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}\quad \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{1-x}$ (scegliendo $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1-x)$) $= \varepsilon$.

Quindi $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}\ \forall n\geq\bar{n}\quad \frac{1}{1-x}-\varepsilon \leq 1+x+x^2+\dots+x^n \leq \frac{1}{1-x}$.

Allineamenti decimali

considerando quindi una successione di "cifre"

$$a_n : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

e che gli allineamenti decimali finiti son le frazioni

$$a_0, a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \quad , \quad a_0, a_1 a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} \quad , \quad \dots$$

l'allineamento decimale infinito

$a_0, a_1 \dots a_n \dots$ denota il numero reale

$$\sup\left\{ a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

in effetti questo estremo inferiore è finito

poichè $a_0 + \frac{a_1}{10} \dots + \frac{a_n}{10^n} \underset{\text{"cifre"}}{\leq} 9 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n} = 9\left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^n}\right)$

$$\overset{\text{Es 5}}{=} 9 \, \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} \leq 9 \, \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10 \quad (= \dots 9,\overline{9}) \; .$$

Cioè $10 \in \mathcal{M}_{\left\{ a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} : n \in \mathbb{N} \right\}}$