Oss: $f: A \to \mathbb{R}$ allora $m = \sup(f)$

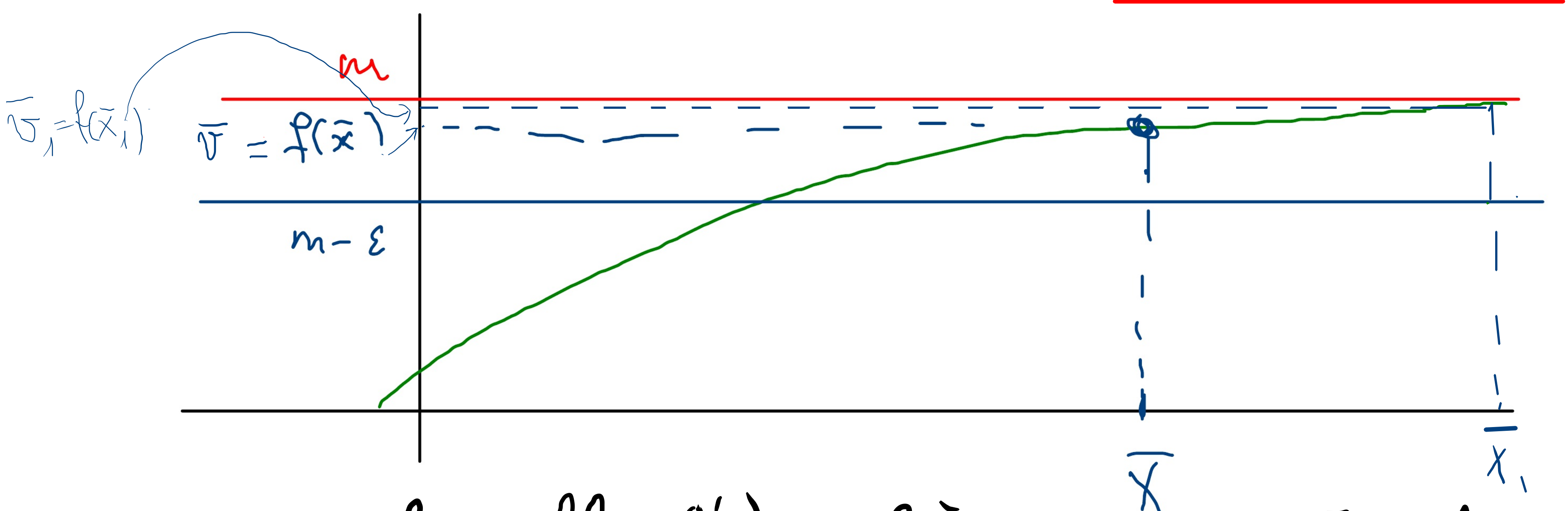
se e solo se valgono

1) $f(x) \leq m \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) > m - \varepsilon$

2') $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{v} \in f(A)$ t.c. $\bar{v} > m - \varepsilon$

cioè, per 1), $0 \leq m - f(\bar{x}) < \varepsilon$



La 2) equivale alla 2') poiché $f(A) = \{v : \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = v\}$

Oss: $f: A \to \mathbb{R}$ allora $m = \sup(f) \in \mathbb{R}$

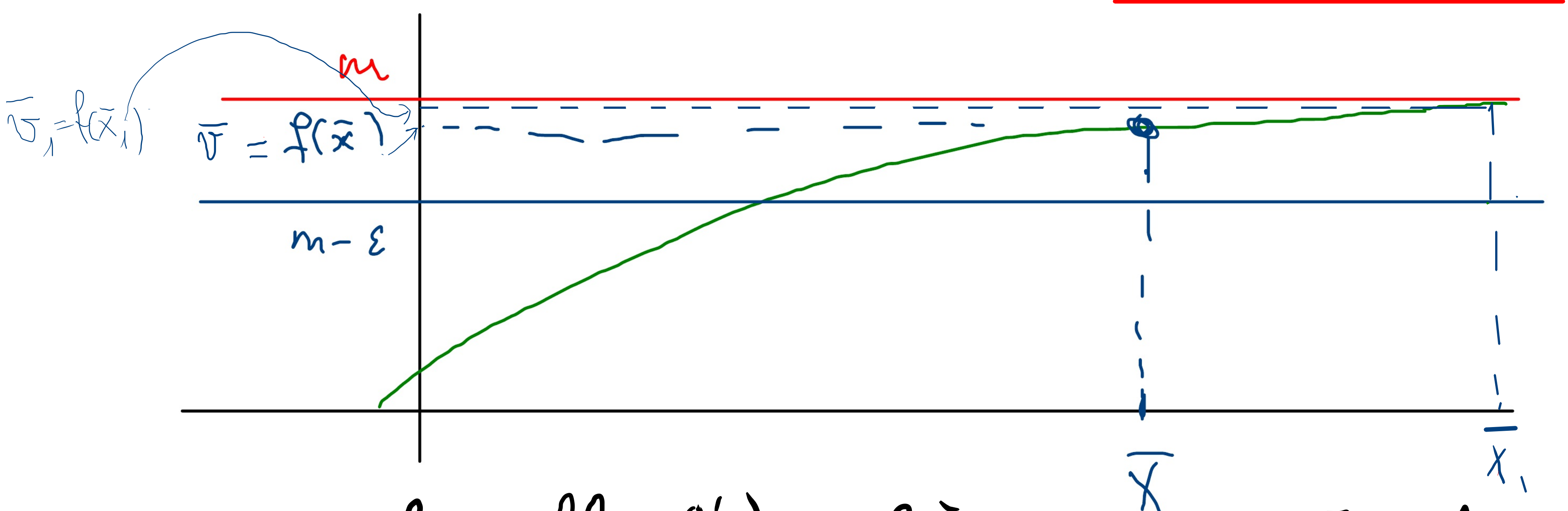
se e solo se valgono

1) $f(x) \leq m \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) > m - \varepsilon$

cioè, per 1), $0 \leq m - f(\bar{x}) < \varepsilon$

2') $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{v} \in f(A)$ t.c. $\bar{v} > m - \varepsilon$



La 2) equivale alla 2') poiché $f(A) = \{v : \exists x \in A \text{ t.c. } f(x) = v\}$

Osservazione: già per la caratterizzazione di estremo superiore di insiemi si può notare che poiché

- $m = \sup B \in \mathbb{R} \Rightarrow 2)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{z} \in B$ t.c. $\bar{z} > m - \varepsilon$

$\bar{z}$ dipende da ε, infatti potrebbe essere che $\begin{cases} \bar{z} > m - \varepsilon \\ \bar{z} < m - \varepsilon/2 \end{cases}$

(è diversissimo dire $\forall \varepsilon \exists \bar{z}$, che dire $\exists \bar{z}\ \forall \varepsilon$ ....)

Pertanto spesso si scrive $\forall \varepsilon \dots \exists \bar{z} = \bar{z}_\varepsilon \dots$ per ricordarsi tale dipendenza

- Poiché $\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$ la 2) è equivalente a

$3)\ \forall n \in \mathbb{N}, n > 0\ \ \exists \bar{z} = \bar{z}_n \in B$ t.c. $\bar{z}_n > m - \frac{1}{n}$ ε

- Nel caso di funzioni: $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0\ \exists \bar{x} = \bar{x}_n \in \operatorname{dom} f$ t.c. $f(\bar{x}_n) > m - \frac{1}{n}$

Continuità

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. La funzione f si dice continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ ($\delta = \delta_\varepsilon$) tale che

$$\forall x \in A,\ \underbrace{|x - x_0| < \delta}_{\text{dist}(x, x_0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\text{dist}(f(x), f(x_0))} < \varepsilon.$$

$-\delta < x - x_0 < \delta$

$$|x - x_0| < \delta \iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

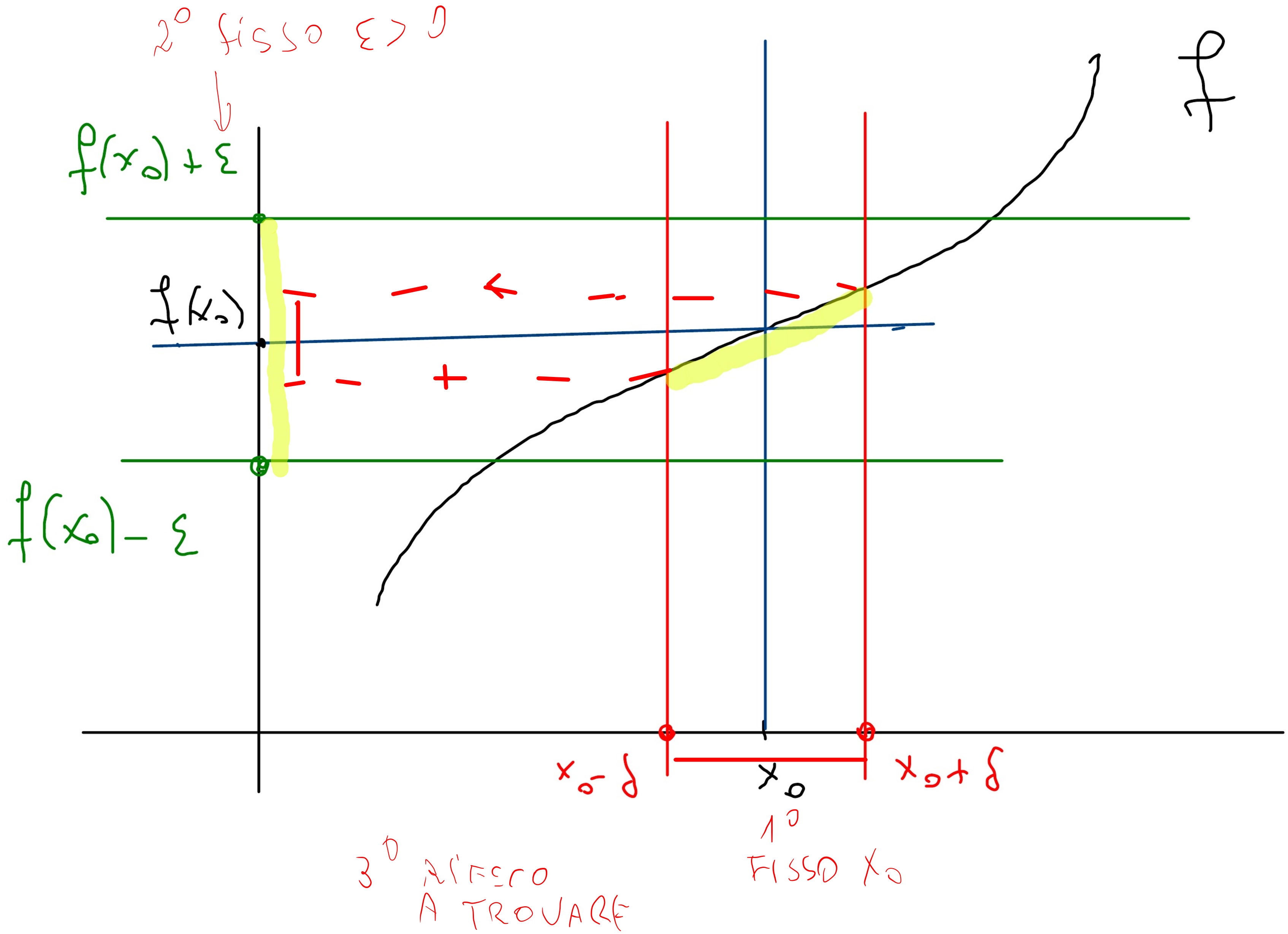
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Def. $x_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^m$, f si dirà continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in A$ se $\text{dist}(x, x_0) < \delta$ allora $\text{dist}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

ora ciò ha senso a patto di calcolare le distanze in $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^m$.

$$f: \underbrace{A \subset \mathbb{R}^n}_{\text{DI PIÙ VARIABILI REALI}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m}_{\text{A VALORI VETTORIALI REALI}}$$



$\delta = \delta_{\varepsilon, f, x_0}$ di modo che

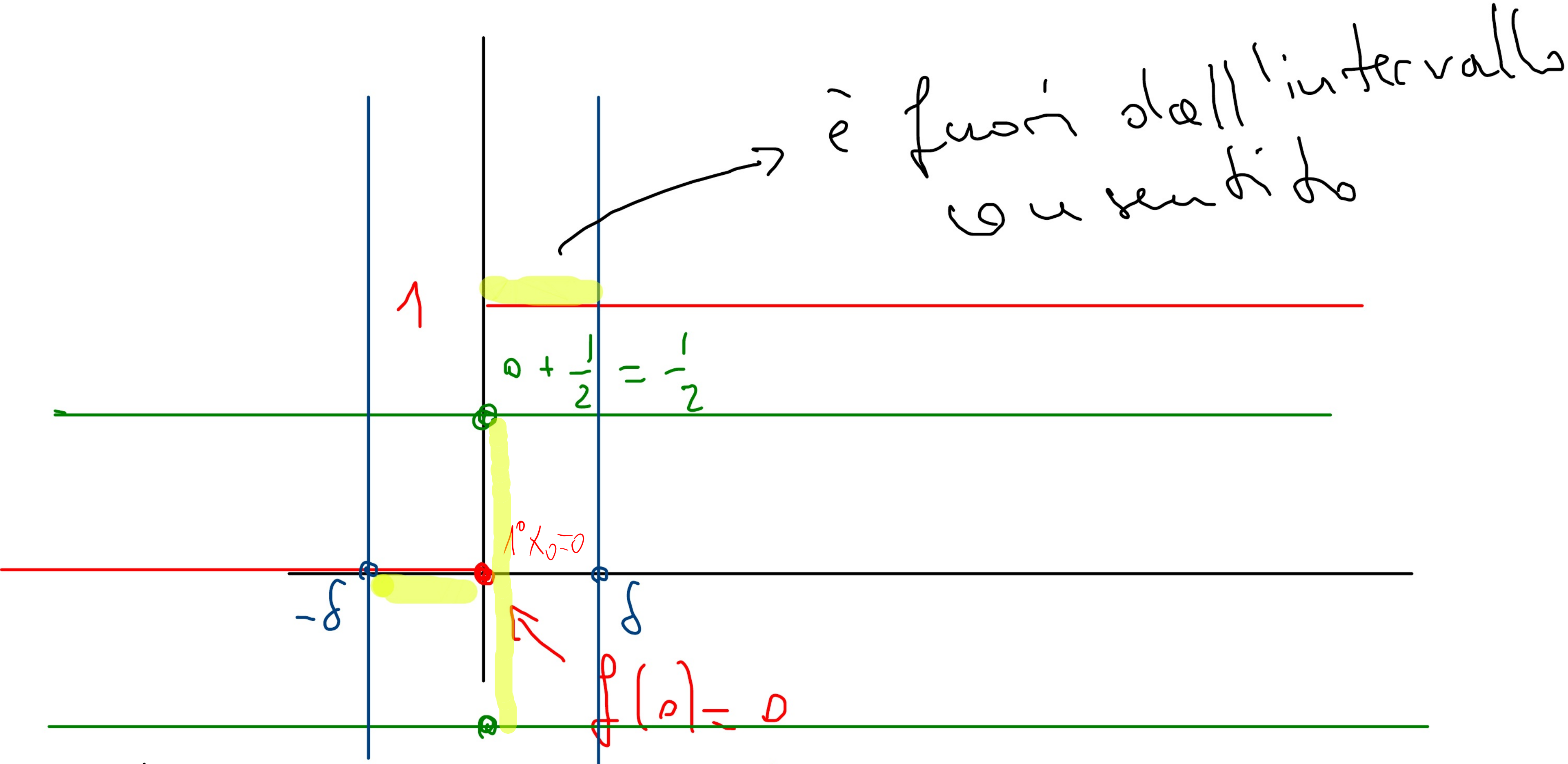
x_0 $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $f((x_0-\delta; x_0+\delta)) \subseteq (f(x_0)-\varepsilon; f(x_0)+\varepsilon)$

1° $\quad$ 2° $\quad$ 3°

Esempio di funzione non continua in un punto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 0$



$0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$f(0) = 0$

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ 2°

$$f(0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2}, \quad f(0) + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2}$$

Intuitivamente: pur essendo $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ di "un sol pezzo"
il grafico e l'immagine non sono di "un sol pezzo"!

qualunque sia $\delta > 0$ se $x \in (0, \delta)$

$\Rightarrow f(x) = 1$ quindi la disuguaglianza

$$f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$$

che diventa

$$0 - \frac{1}{2} < f(x) < 0 + \frac{1}{2}$$ è falsa

$$\Downarrow$$

$$1 < \frac{1}{2}$$ se $x \in (0, \delta)$

$\Rightarrow f$ non è continua in $x_0 = 0$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $B \subset A$

Si dice che f è continua in B se f è continua in ogni punto $x_0 \in B$.

Se dico semplicemente che f è continua (senza specificare il sottoinsieme B) vuol dire che f è continua in tutti i punti del suo dominio A.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $A = \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

f è continua in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = B \subset A$

$B = A \setminus \{0\}$

Permanenza del segno

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e $f(x_0) \underset{\neq}{\geq} 0$ allora $\exists\, \delta > 0$ t.c. se $x \in A$ e $\underbrace{|x - x_0|}_{\operatorname{dist}(x, x_0)} < \delta \implies f(x) > 0$.

Analogo risultato se $f(x_0) \underset{\neq}{\leq} 0$.

dim: Sappiamo che $f(x_0)>0$. Scelgo $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ e lo uso nella definizione di continuità.

Allora $\exists\, \delta>0$ t.c.

$x \in A$, $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$

cioè

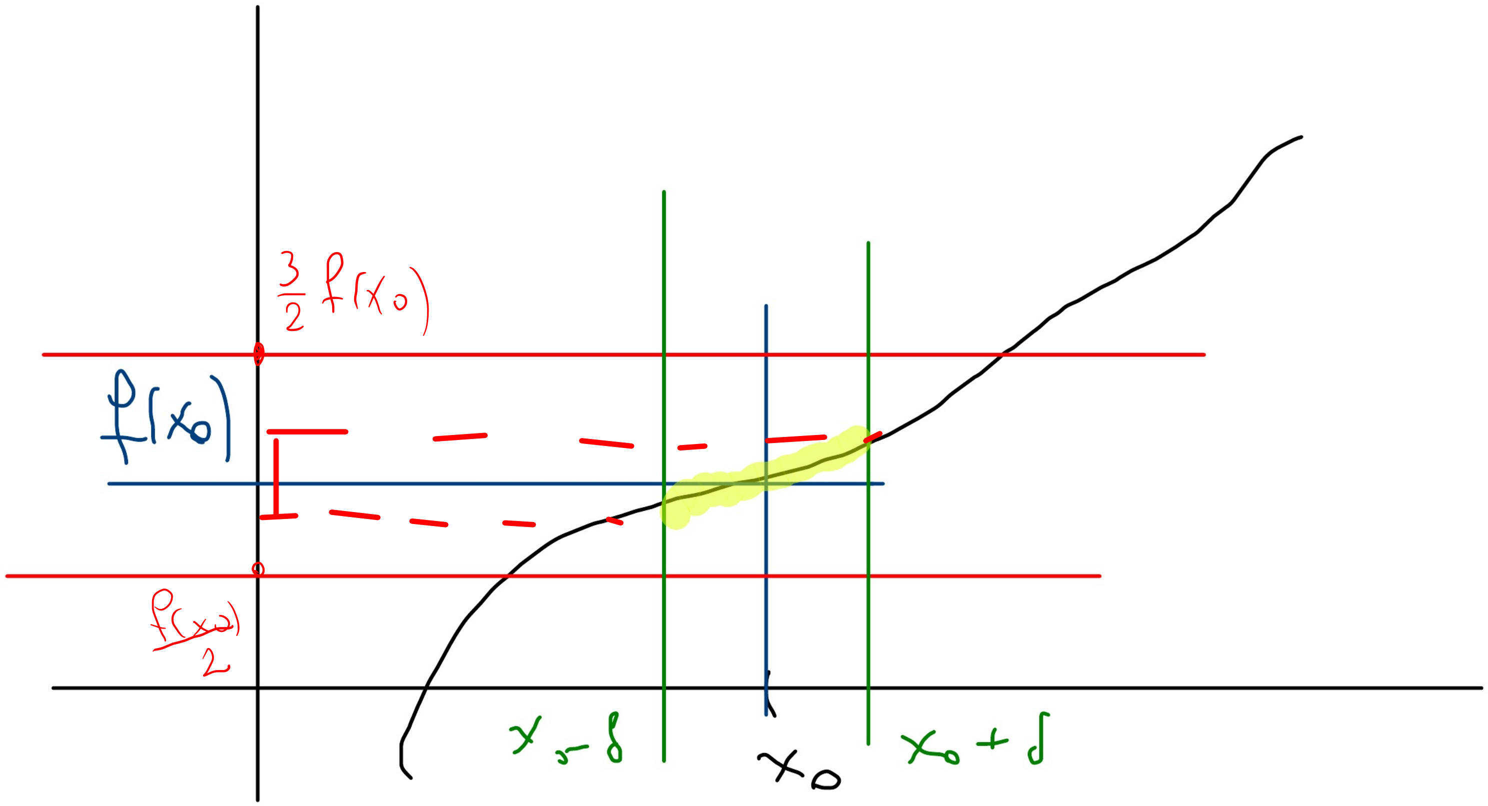
$$\underbrace{f(x_0)-\varepsilon < f(x)}< f(x_0)+\varepsilon$$

$$f(x) > f(x_0)-\varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0 .$$

$$\boxed{f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}} < f(x) < f(x_0)+\frac{f(x_0)}{2}$$

$\frac{f(x_0)}{2} > 0$

$\square$



$\frac{3}{2}f(x_0)$
$f(x_0)$
$\frac{f(x_0)}{2}$
$x_0-\delta$
x_0
$x_0+\delta$

Corollario: Se f è continua in x_0

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e $f(x_0) > M \in \mathbb{R}$

allora $\exists\ \delta > 0$ t.c. $g(x_0) > 0$

$x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

(vale anche con $f(x_0) < M \Rightarrow f(x) < M$).

dim: applico il teorema precedente alla funzione $g(x) = f(x) - M$.

$|g(x) - g(x_0)| =$
$= |f(x) - M - (f(x_0) - M)| =$
$= |f(x) - \cancel{M} - f(x_0) + \cancel{M}|$

$\square$

si usa 1) le funzioni costanti sono continue
2) differenza di funzioni cont. è continua

Teorema: Se f e g sono continue in x_0 allora lo sono anche le funzioni $\text{dom} f \cap \text{dom} g$

$f+g$, $f \cdot g$, $|f|$. Se inoltre $f(x_0) \neq 0$ allora anche $\frac{1}{f}$ è continua in x_0

$\Downarrow$

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
$x \in \text{dom} f$
$f(x) \neq 0$

Corollario: $\frac{f}{g}$ è continua (se $g(x_0) \neq 0$).

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

Es f e g cont. in x_0

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| = |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \leq |f(x)(g(x)-g(x_0))| + |g(x_0)(f(x)-f(x_0))|$$
$$= \cancel{|f(x)|}\,|g(x)-g(x_0)| + |g(x_0)||f(x)-f(x_0)| \leq 2|f(x_0)|\ldots$$

Oss. Son casi particolari del teorema della continuità della funzione composta per funzioni di più variabili e a valori vettoriali

Es: $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $s(x,y) = x+y$; $F: A \to \mathbb{R}^2$, $F(z) = (f(z), g(z))$; $s \circ F(z) = f(z) + g(z)$

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to B \subset \mathbb{R}$
Se f è continua in I ed è invertibile
allora f^{-1} è continua in B.

Prop 2: (conseguenza del teorema dei "valori intermedi", cfr. pag 28)

I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$
se f è continua ed è iniettiva
allora f è strettamente monotona

Osserviamo che l'ipotesi che il dominio sia un intervallo non può essere omessa.
A tal proposito vediamo due controesempi ove non è detto che funzioni continue iniettive su un dominio che non sia un intervallo, siano monotone o con inversa continua.

1) $f : (-\infty ; 1] \cup (2 ; +\infty) \to \mathbb{R}$

non è un intervallo !

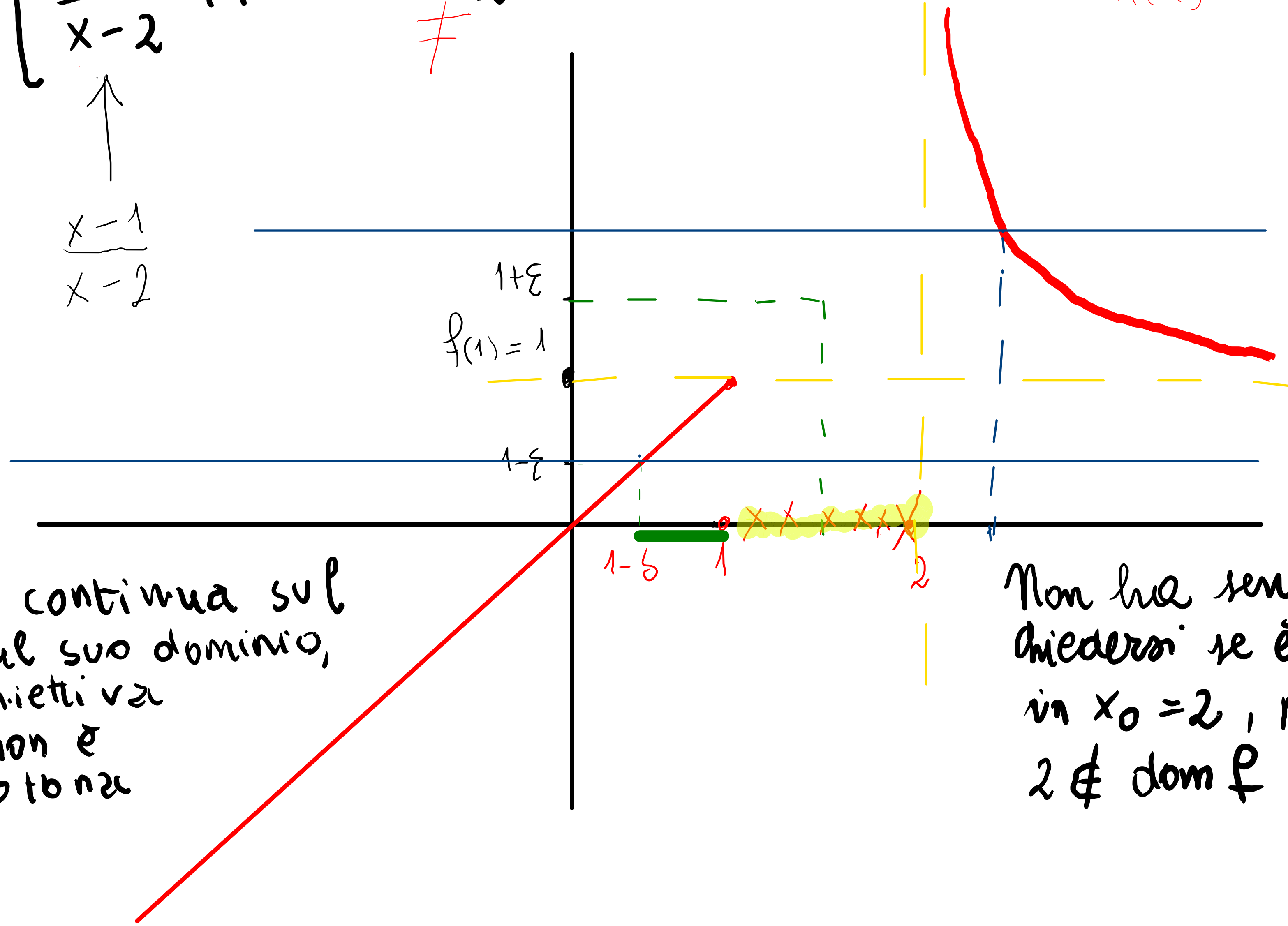
$$\boxed{f(x)} = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x-2} + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

$\frac{x-1}{x-2}$

$g(x) = x$ è continua $|g(x) - g(x_0)| = |x - x_0|$
$\delta = \delta_\varepsilon = \varepsilon$

$h(x) = x - 2$ "

$k(x) = \frac{1}{x-2}$ è cont per $x \neq 2$



f è continua sul suo dominio, iniettiva ma non è monotona

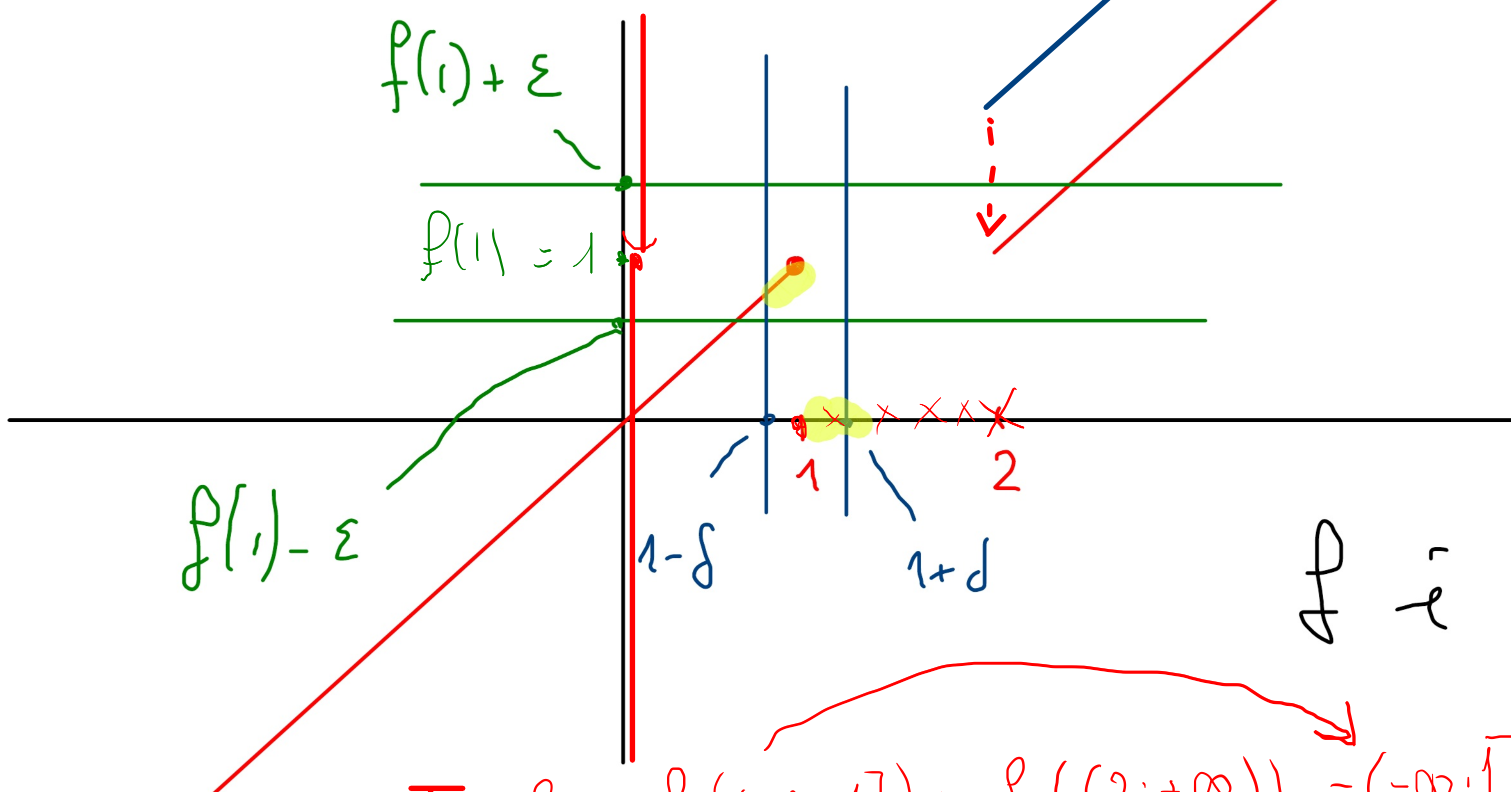
Non ha senso chiedersi se è continua in $x_0 = 2$, poiché $2 \notin \text{dom} f$

2) $f : \boxed{(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)} \to \mathbb{R}$ non è un interv.

$$\boxed{f(x)} = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 1 \\ x-1 & \text{se } x > \cancel{1}\ 2 \end{cases}$$

$|x - x_0| < \delta$

$x \in A$



f è continua?

$\mathrm{Im}\, f = f((-\infty,1]) \cup f((2;+\infty)) = (-\infty;1] \cup (1;+\infty) = \mathbb{R}$

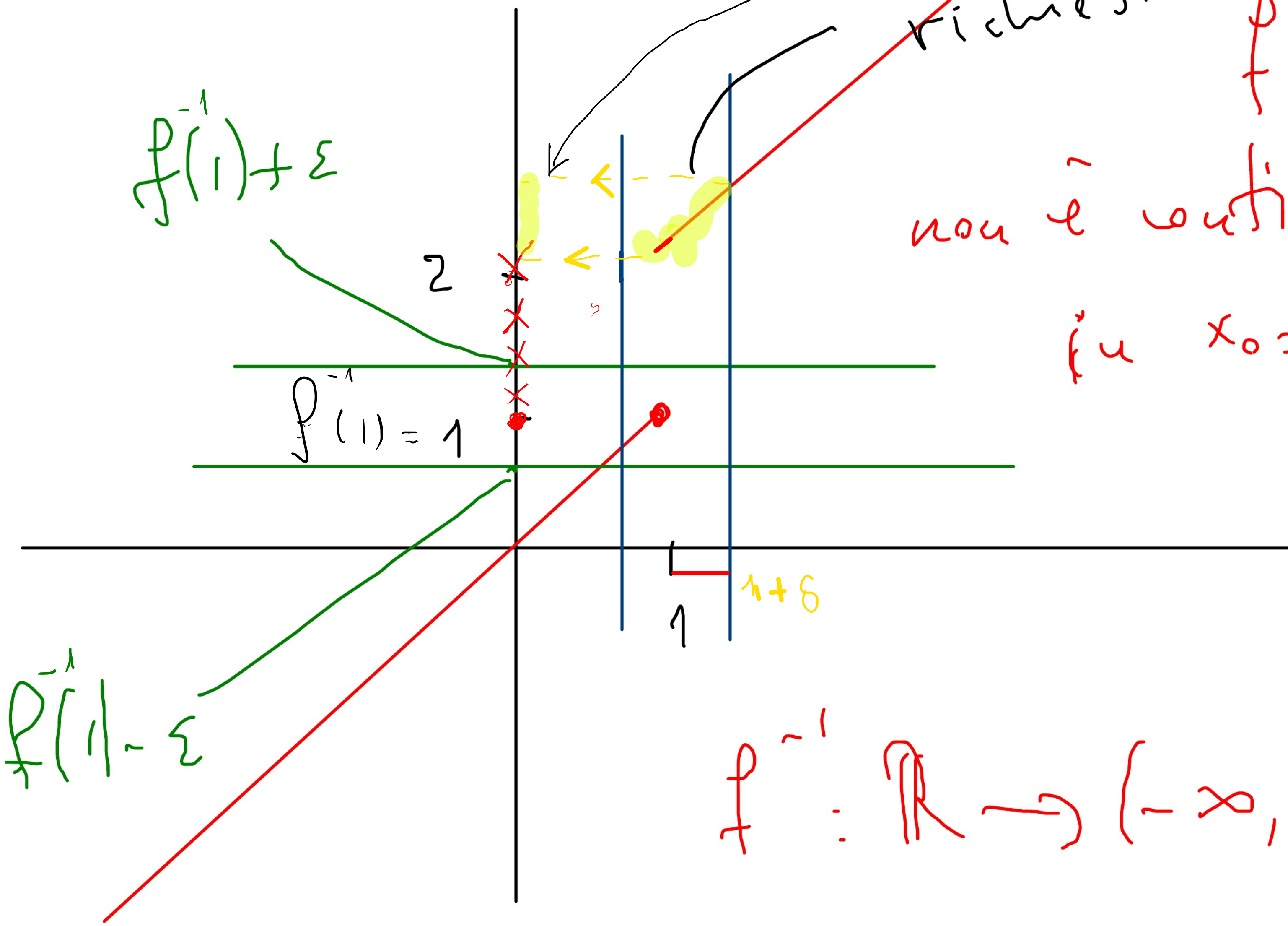
non ha senso domandarsi se la funzione è continua in $x_0 = 2$ perché il punto non è nel dominio della f.

In $x_0 = 1$ è continua. Allora f è continua in tutto il suo dominio.

Disegnamo f^{-1}

non è nell'intervallo richiesto

f^{-1}



non è continua in $x_0=1$.

$f^{-1}: \mathbb{R} \to (-\infty,1] \cup (2,+\infty)$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$$

Se f non è definita su un intervallo potrebbe succedere che f^{-1} non è continua anche se f è continua.

Continuità delle funzioni elementari

$f(x) = x$ è continua.

da questo segue che tutti i polinomi
(tutte le funzioni polinomiali)

Sono continui.
(mi serve anche sapere che le funzioni costanti sono continue).

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$x^2 = x \cdot x \Rightarrow$ continua

$x^3 = x^2 \cdot x \Rightarrow$ continua

$\dots$ x^n è continua $\forall n \in \mathbb{N}$.

RAPPORTI DI FUNZIONI POLINOMIALI

Le funzioni razionali sono continue nel loro insieme di definizione.

Funzione razionale = quoziente di polinomi

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad , p, q \text{ polinomi.}$$

è definita se $q(x) \neq 0$.

Assumeremo che

e^x, $\sin x$, $\cos x$ sono funzioni continue.

Quindi anche

$\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$.

$$\arcsin x = \left(\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \qquad \arccos x = \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1} \qquad \operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg}\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$

<u>Teorema</u>: $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0) \in B$.

Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora $g \circ f$ è continua in x_0.

<u>Es</u>: $e^{\cos x}$ è una funzione continua. È la composizione di $f(x) = \cos x$ e $g(y) = e^{y}$.

Oss: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora

$$\sup_{x\in(a,b)} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

$$\inf_{x\in(a,b)} f(x) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

$\sup f = \text{MAX } f = f(a)$ o $f(b)$

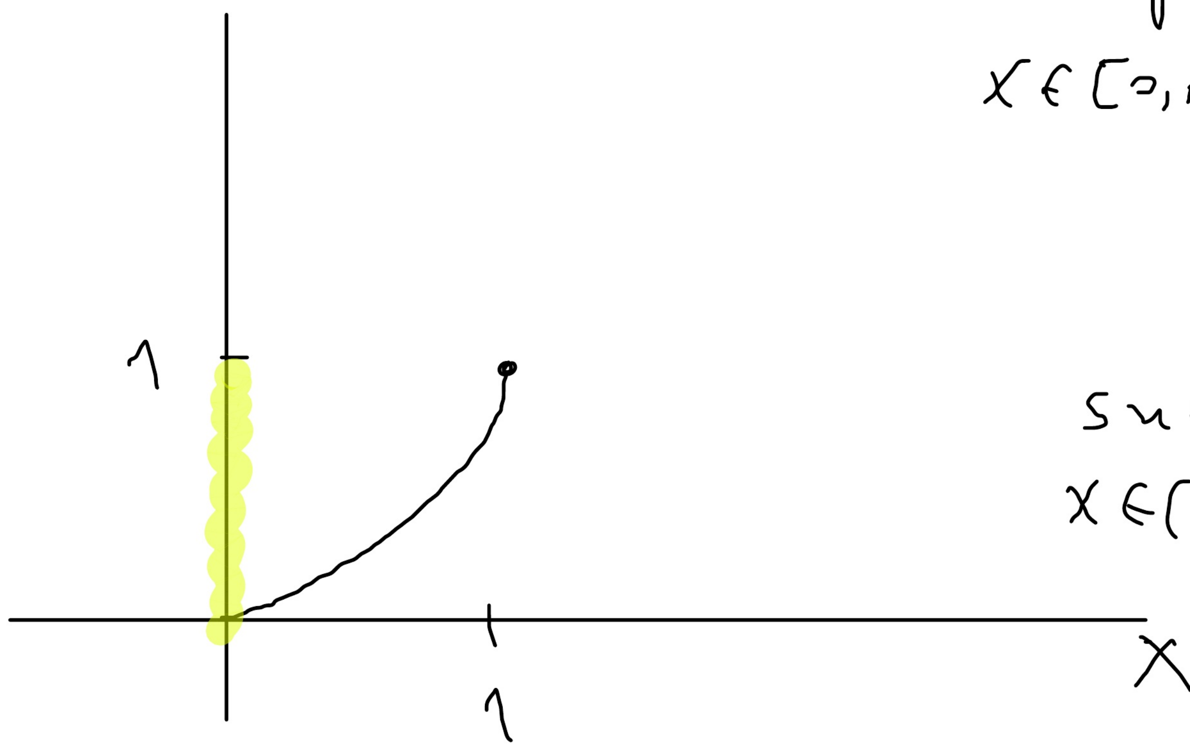
$\text{MAX } f = f(x_0)$ $a < x_0 < b$

$$\begin{matrix} \sup \\ \inf \\ (a,+\infty) \\ (-\infty, b) \end{matrix} \; f \;=\; \begin{matrix} \sup \\ \inf \\ [a,+\infty) \\ (-\infty, b] \end{matrix}$$

Es: $f(x) = x^2$ $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\sup_{x \in [0,1]} f(x) = f(1) = 1.$$

è anche un max



$$\sup_{x \in (0,1)} f(x) =$$

$$\sup \mathrm{Imm}(f) =$$

$$= \sup (0,1) = 1$$

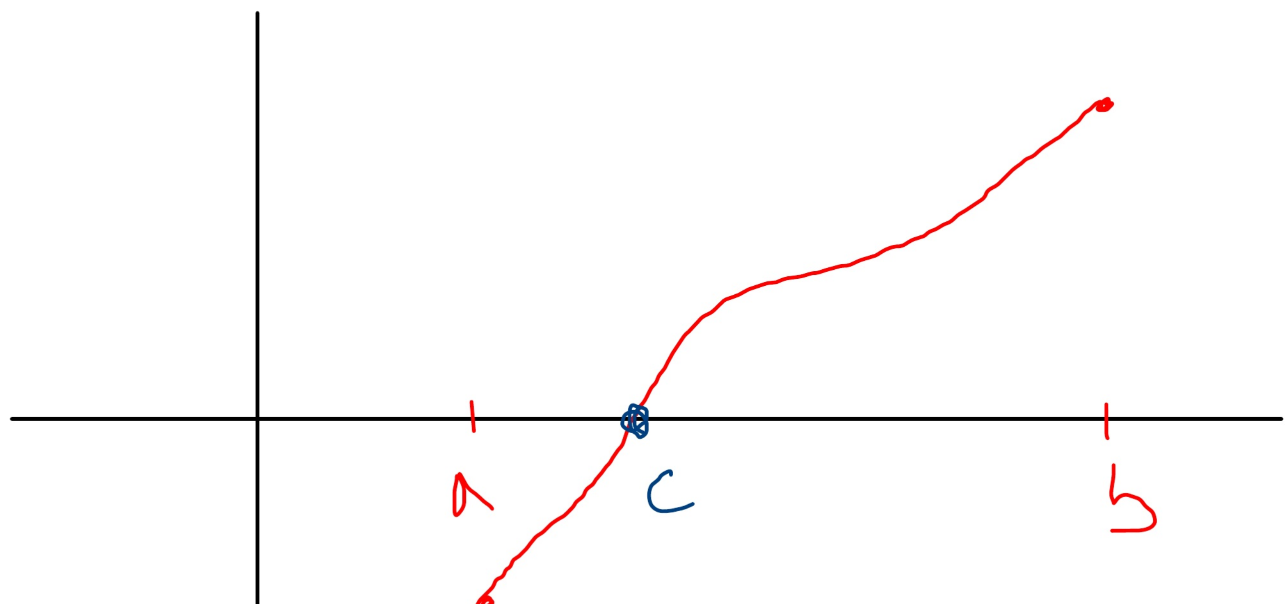
Teorema degli zeri

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.

$f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$

f ha segno discorde negli estremi

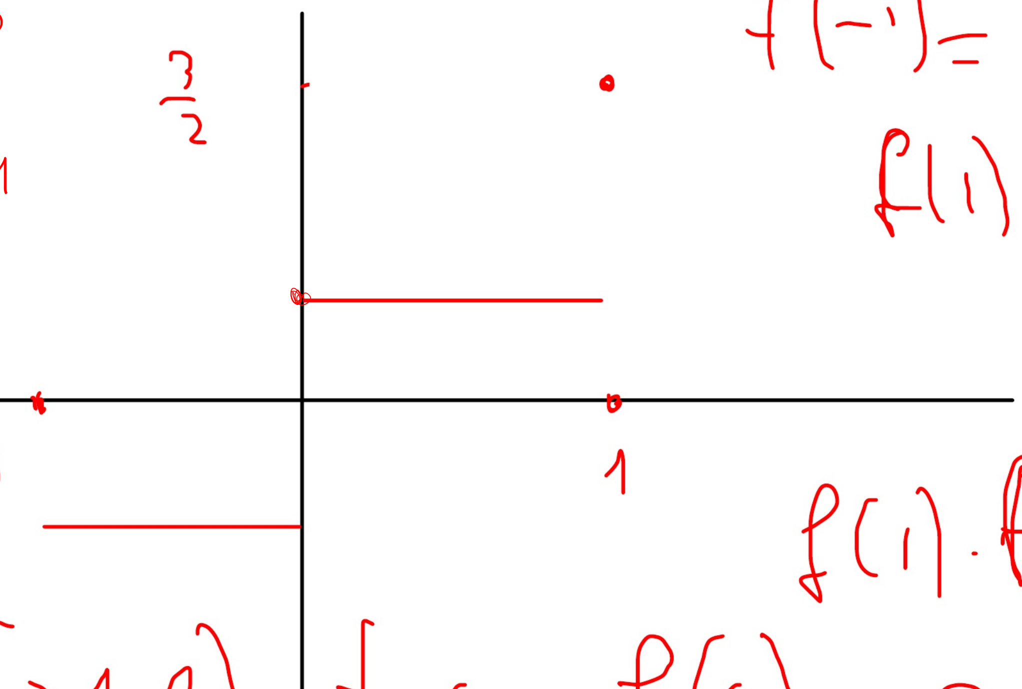


L'ipotesi di continuità è necessaria.

Infatti

$$f(x) = [x] + \frac{1}{2} \qquad f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} & x = 1 \end{cases}$$



$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2} = [1] + \frac{1}{2}$$

$$f(1) \cdot f(-1) < 0$$

ma $\nexists\, c \in [-1, 1]$ t.c. $f(c) = 0$

Teorema dei valori intermedi

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua.
Allora $f(I)$ è un intervallo

(l'immagine di f).

$\mathrm{Im} f = (\inf f ; \sup f)$ $\otimes$
$[\min f ; \sup f)$
$(\inf f ; \max f]$
$[\min f ; \max f]$

CIÒ PERMETTE LO STUDIO TEORICO DELLA SURG.

Corollario: $I \subset \mathbb{R}$, intervallo, f continua.
Se f assume i valori y_1 e y_2 allora assume anche tutti i valori compresi fra y_1 e y_2.

$\otimes$ $-\infty < \inf f < V < \sup f < \infty$

$\varepsilon < \sup f - V > 0$

$-\varepsilon > \inf f - V < 0$

$f - V$

$\exists x_1 \quad f(x_1) > \sup f - \varepsilon$

$\exists x_2 \quad f(x_2) < \inf f + \varepsilon$

$f(x_1) - V > \sup f - \varepsilon - V > 0$

$f(x_2) - V < \inf f + \varepsilon - V < 0$

$\exists c$ tra x_1 e x_2

$f(c) - V = 0$

2) CHIUSO cioè con estremi
3) LIMITATO

Teorema di Weierstrass.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 1) continua. Allora

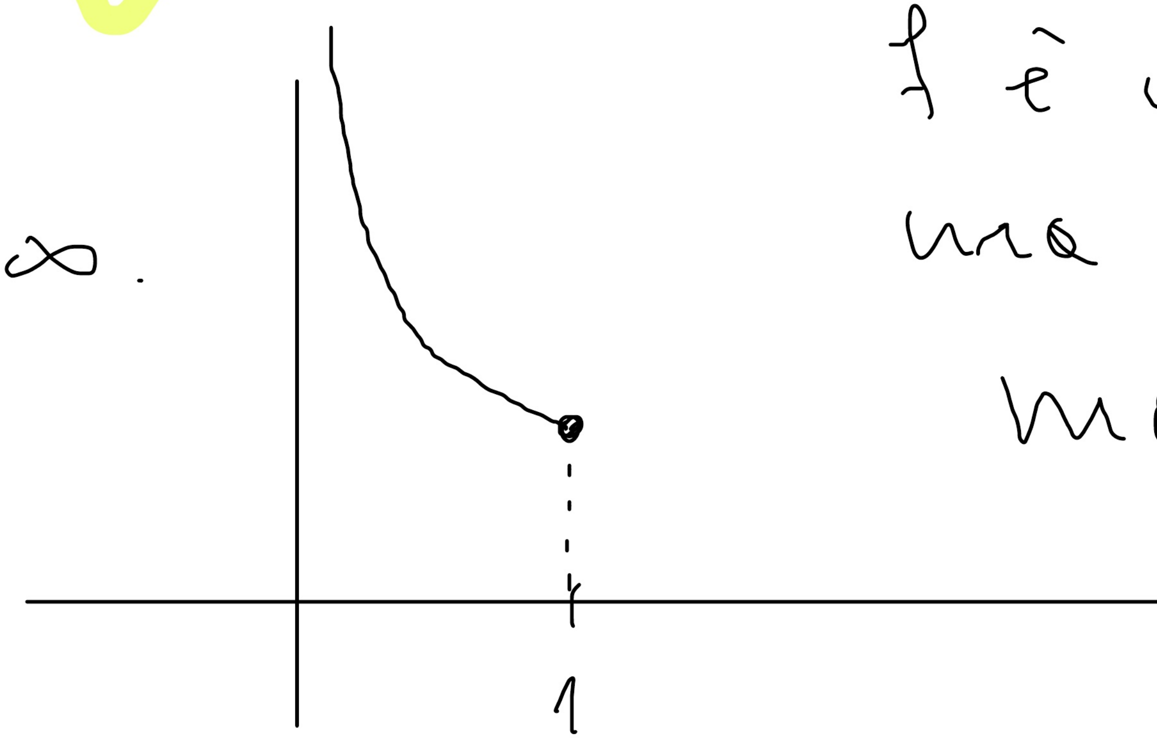
f ha massimo e minimo. (in particolare ne segue f LIMITATA)

$a, b \in \mathbb{R}$ cioè $a, b \neq \pm\infty$.

e gli estremi sono compresi.

Perché $[a,b]$ deve essere limitato e chiuso?

Es: $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x}$

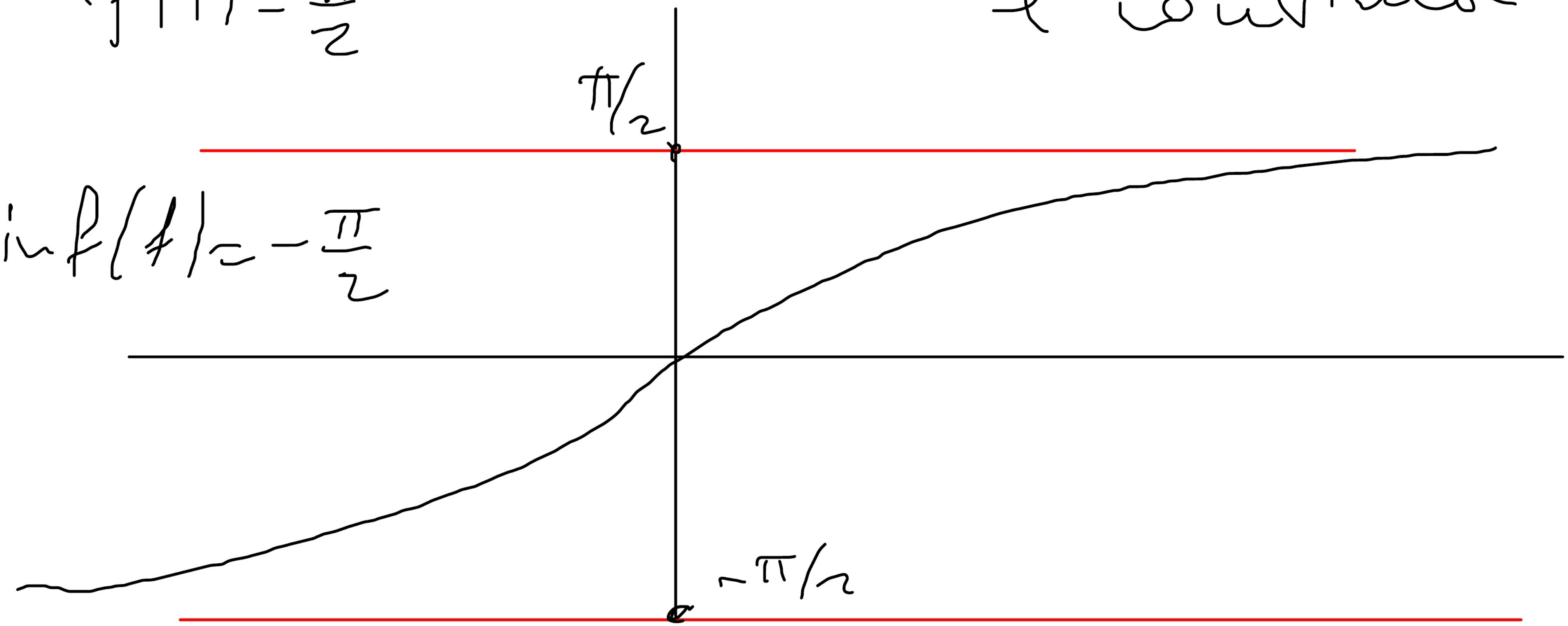


$\sup(f)=+\infty$.

f è continua ma non ha max.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\quad f(x) = \operatorname{arctg} x$

$\sup(f) = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ è continua



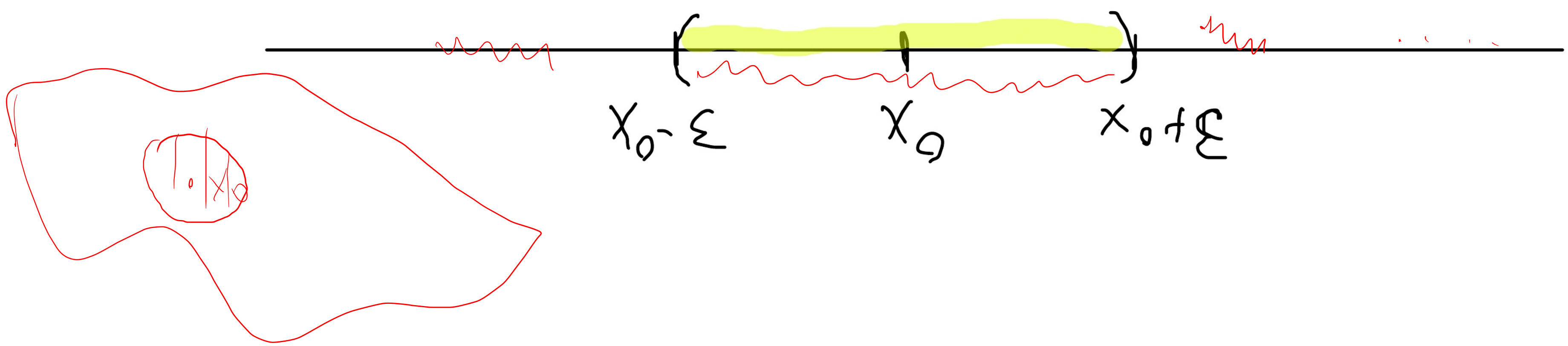
$\inf(f) = -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ ma non ha né max né min.

Intorni.

Def. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice <u>intorno</u> di x_0 un insieme che contiene un insieme del tipo
$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$
dove $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

ε si dice <u>raggio</u> dell'intorno.



Un insieme del tipo $[x_0, x_0+\varepsilon)$

si dice intorno destro di x_0.

Un insieme del tipo $(x_0-\varepsilon, x_0]$

si dice intorno sinistro di x_0.

Def: Se $x_0 = +\infty$ un intorno di x_0

è un insieme del tipo $(a, +\infty)$ $(-\infty; a)$

dove $a \in \mathbb{R}$

semiretta.

Un intorno di $-\infty$ è un insieme del tipo $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$.

semiretta

intorno di $+\infty$

Def: Data $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

quindi non è detto che $x_0 \in A$

x_0 si dice punto di accumulazione per A se $\forall\, U$ intorno di x_0 risulta

$$U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

$\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, x \in A : 0 < |x - x_0| < \varepsilon$

Vuol dire che "vicino" a x_0 ci sono altri punti di A oltre a x_0 (x_0 potrebbe anche non appartenere ad A).

$A \neq \emptyset$ è illimitato superiormente $\iff$ $+\infty$ è di accumulazione per A

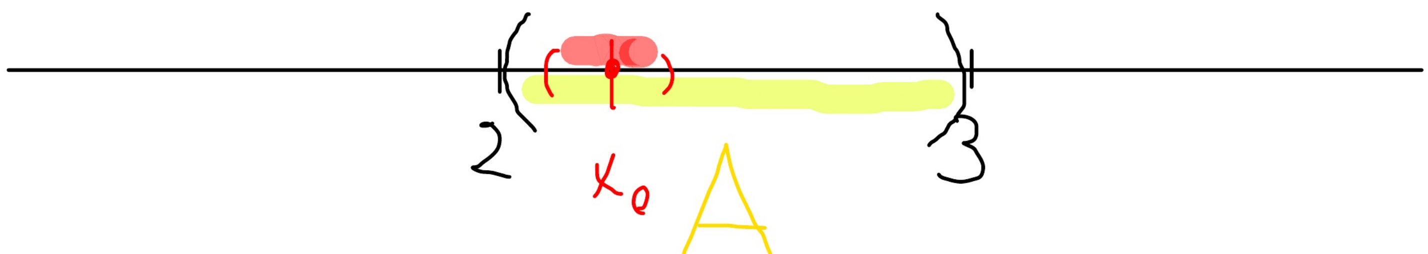
Es: $A = (2,3)$.

$Acc(A) = \{$punti di accumulazione di $A\} = ?$

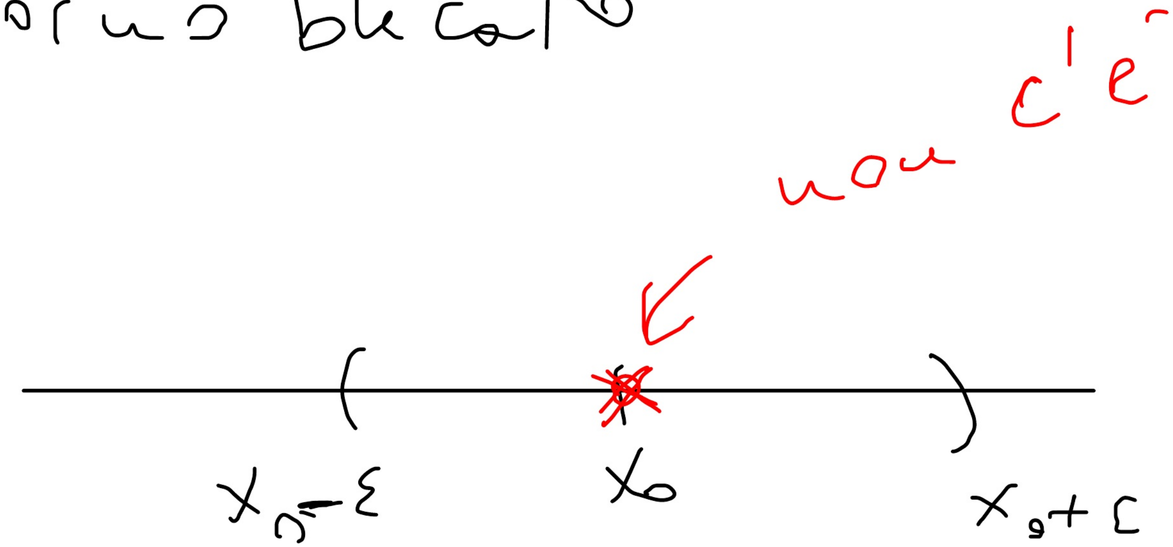
$x_0 \in (2,3)$

ogni intorno di x_0 interseca A in infiniti punti

$Acc(2,3) = [2,3]$



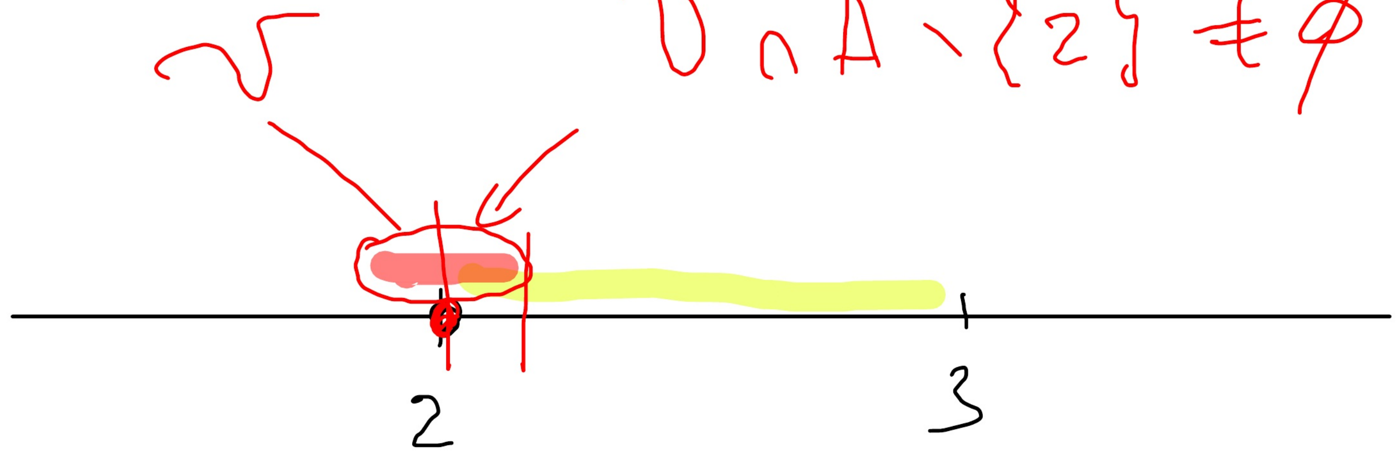
$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$ si chiama anche intorno bucato



$\Rightarrow \quad (2,3) \subset Acc(A)$.

ce ne sono altri?

$V \cap A \setminus \{2\} \neq \emptyset$



$x_0 = 2$ è di accumulazione? SÌ

lo stesso per $x_0 = 3$.

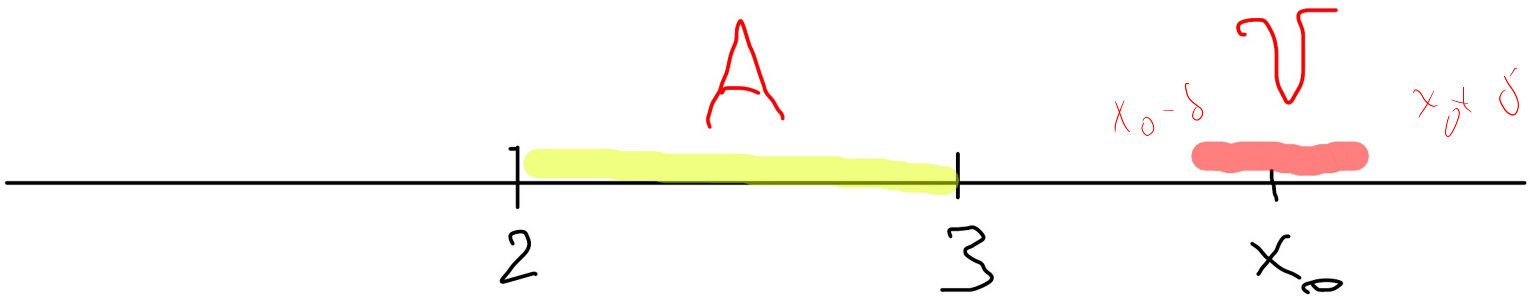
$\Rightarrow [2,3] \subset \mathrm{Acc}(A)$

ce ne sono altri? NO.

$x_0 > 3 \Rightarrow x_0 - \frac{|3-x_0|}{2} > 3$

$A \cap (x_0-\delta; x_0+\delta)$ $\qquad \delta < \frac{|3-x_0|}{2}$

$(2,3) \cap (x_0-\delta; x_0+\delta) \subset (2;3) \cap \left(x_0 - \frac{3-x_0}{2}; +\infty\right)$



$V \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$.

$\Rightarrow Acc(A) = [2,3]$

$B = [2,3]$ $\qquad$ $Acc(B) = ?$

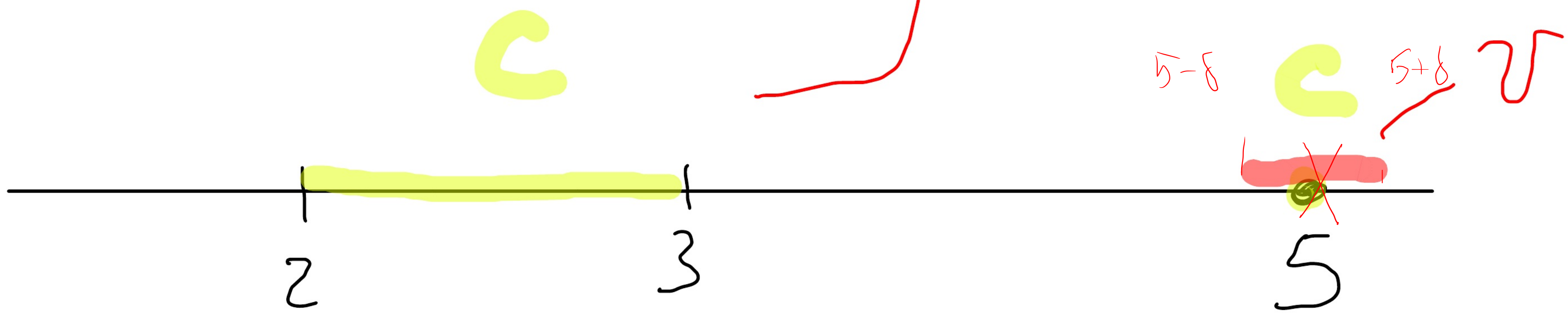
$Acc(B) = [2,3]$

$C = (2,3) \cup \{\underset{x_0}{5}\}$

$U \cap C = \{5\}$

$\underbrace{U \cap C}_{\{5\}} \setminus \{5\} = \emptyset$

$\delta < \frac{5-3}{2} = 1$



$Acc(C) = ?$ $\qquad$ $5 \notin Acc(C)$

$Acc(C) = [2,3]$.

<u>Def</u>: un punto $x_0 \in A$ si dice <u>punto isolato</u> di A se esiste V intorno di x_0 t.c. $\boxed{V \cap A = \{x_0\}}$.

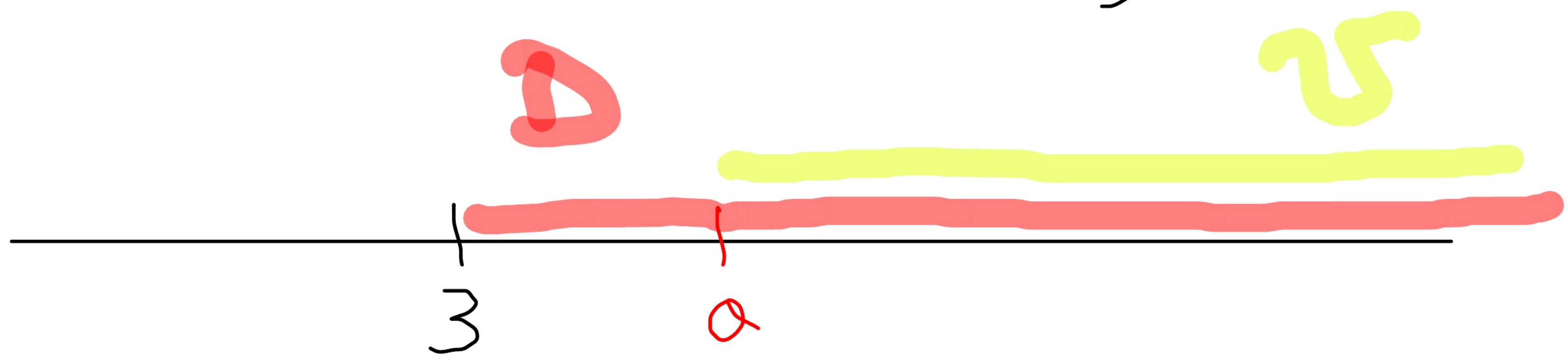
<u>Es</u>: $A = [2,3] \cup \{5\} \Rightarrow 5$ è punto isolato di A.

Es: $D = (3, +\infty)$

$Acc(D) = ?$ $\quad [3, +\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ $\quad (3, +\infty) \subset Acc(D)$

$+\infty$ è punto di accumulazione per D?

Verifichiamo. Prendiamo V intorno di $+\infty$. Quindi $V = (a, +\infty)$



definiamo $b = \max\{3, a\}$

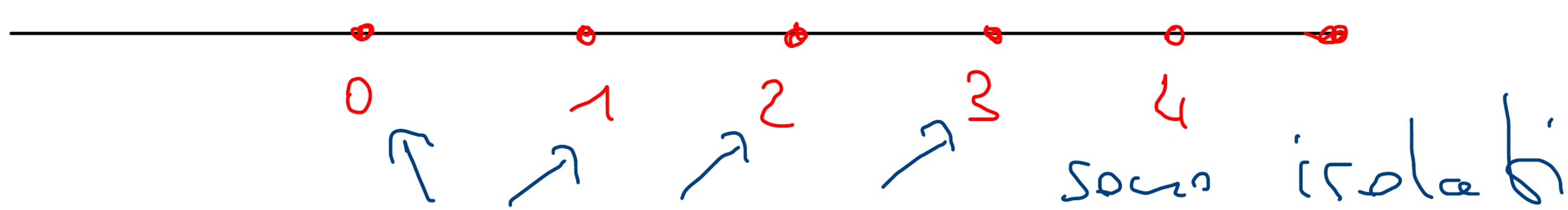
$$D \cap V \setminus \{x_0\} = (3,+\infty) \cap (a,+\infty) \setminus \{+\infty\} =$$

$$= (b,+\infty) \neq \emptyset .$$

$\Rightarrow +\infty$ è punto di accumulazione per D

$$Acc(D) = [3,+\infty] .$$

Es: $E = \mathbb{N}$ $\qquad Acc(\mathbb{N}) = ?$ $\emptyset$

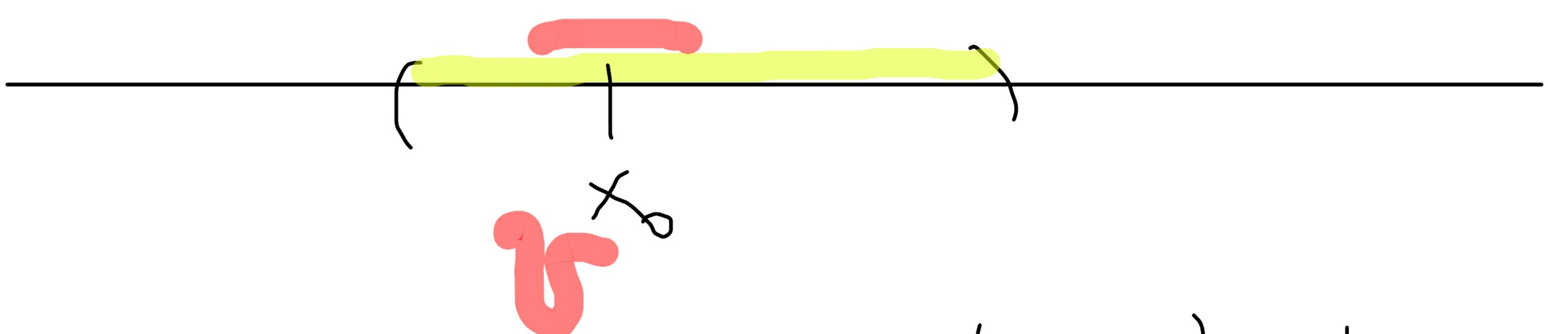


tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono punti isolati
quindi non sono di accumulazione.
$+\infty$ è l'unico punto di accumulaz.
per $\mathbb{N}$

$$Acc(\mathbb{N}) = \{+\infty\}.$$

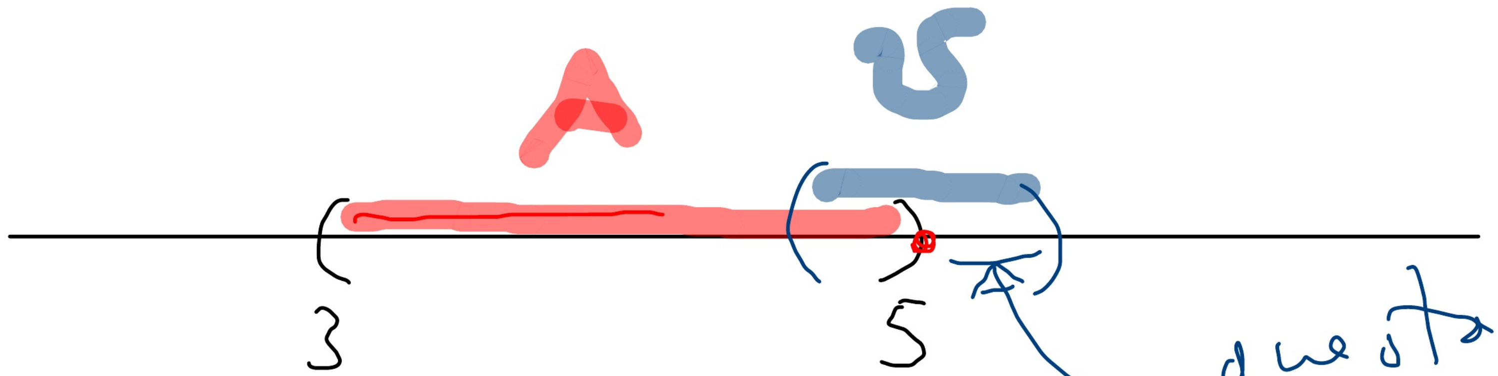
$$Acc(\mathbb{Z}) = \{-\infty, +\infty\}.$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se esiste U intorno di x_0 t.c. $U \subset A$. I punti interni si indicano con $\mathrm{int}(A)$.



Es: $A = [3,5] \Rightarrow$ punti interni ad A sono $(3,5)$

$\mathrm{int}([3,5]) = (3,5)$.



questa parte non è in A.

dovrei trovare un intorno di 5 che è tutto contenuto in A.

ESERCIZIO (teorico)

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A \quad x_0$ isolato in A $\Rightarrow$ f è continua in x_0