Esercitazione 3 12/10/2020

Esercizio 7:

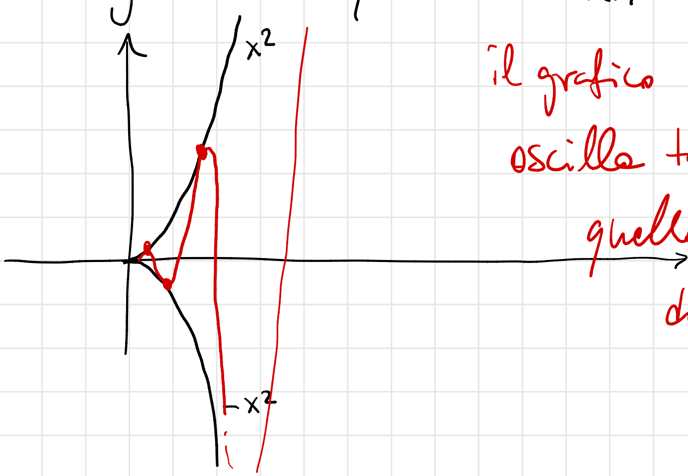
$$A = \{ x^2 \sin(x^2) \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0 \}$$

è limitato (e da quale parte?).

Proviamo a immaginarci il grafico di $f(x) = x^2 \sin(x^2)$.

- x^2 cresce al crescere di x, e per $x \to +\infty$ va a $+\infty$.
- $\sin(x^2)$ oscilla in continuazione tra -1 e 1, prendendo tutti i valori compresi.

Il grafico di $f(x)$ "oscillerà" tra quello di $g(x) = x^2$ e quello di $h(x) = -x^2$



il grafico di $x^2 \sin(x^2)$ oscilla toccando alternativam. quello di x^2 e quello di $-x^2$.

Dal grafico sembra che l'immagine di $f(x)$

(cioè l'insieme A) non sia limitato.

È comodo ad esempio guardare i punti in cui

$\sin(x^2) = 1$ (oppure a -1).

$\Updownarrow$

$x^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightsquigarrow \quad x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$

$k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

perché guardo solo $x > 0$

In $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$, $f(x)$ vale $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}_{=1}$

$$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$(k \in \mathbb{N} \iff)$ $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

Da qui è chiaro che $f(x)$ prende valori grandi quanto voglio: se voglio x t.c. $f(x) > \underbrace{M}_{\text{mi è stato dato}} (\gg 0)$

prendo $k \in \mathbb{Z}$ t.c. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi > M$

cioè $2k\pi > M - \frac{\pi}{2}$

$$k > \frac{M - \frac{\pi}{2}}{2\pi}$$

Quindi posso prendere $k = \left\lfloor \frac{M - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor + 1$.

Lo stesso discorso nei punti in cui $\sin(x^2) = -1$

Questo succede $\iff$ $x^2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$

$$\Updownarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$$

e per questi punti, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \cdot \overbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)}^{=-1}$

$$= -\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$$

e questo numero diventa negativo quanto voglio aumentando $k \in \mathbb{N}$.

Quindi A è illimitato.

<u>Esercizio 2</u>: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\sin x)^2)}{e^x - \cos x} = \frac{\log(1+\sin(0)^2)}{e^0 - \cos(0)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

f. indeterm.

limiti notevoli da usare:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\log(1+(\sin x)^2)}{e^x - \cos x} = \underbrace{\frac{\log(1+(\sin x)^2)}{(\sin x)^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{(\sin x)^2}{x^2}}_{= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1^2 = 1} \cdot \frac{x^2}{e^x - \cos x}$$

$\neq 0$ in un intorno di $x=0$

Ora, ponendo $t = (\sin x)^2$, per $x \to 0$ ho $t \to 0$ (continuità di $(\sin x)^2$)

quindi $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\sin x)^2)}{(\sin x)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$

Mi è rimasto da analizzare

$$\frac{x^2}{e^x - \cos x} = \frac{x^2}{e^x - 1 + 1 - \cos x} = \frac{x}{\underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} + \frac{1-\cos x}{x}}$$

Cosa fa $\frac{1-\cos x}{x}$ quando $x \to 0$? $= \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \to \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$

Quindi per $x \to 0$ $\frac{x}{\frac{e^x-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x}} \longrightarrow \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

Quindi il limite richiesto è $1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

Esercizio 9

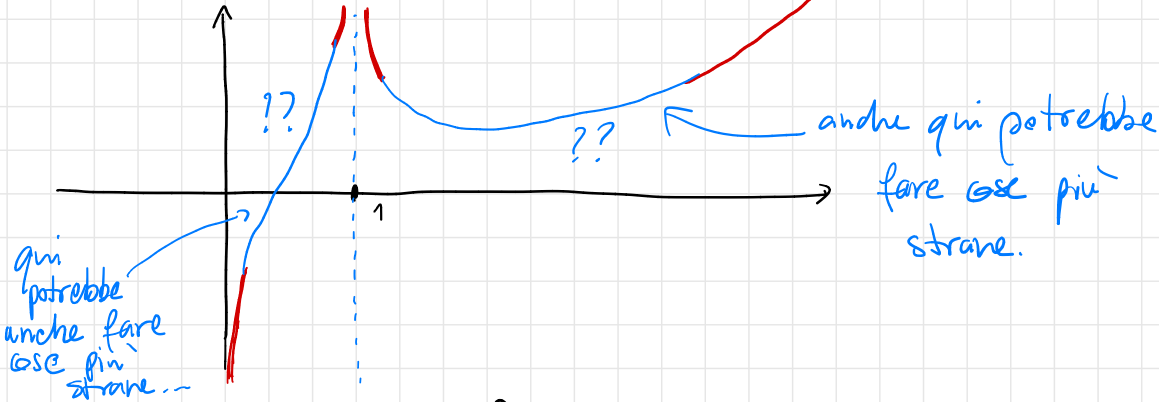
$f(x) : (0,1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

data da $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} + \log x$.

È iniettiva e/o suriettiva ?

Idea: usare i limiti per farsi un'idea rozza del grafico, e vedere se si riesce a concludere.

Consideriamo i limiti al "bordo" del dominio. cioè in 0^+, 1^-, 1^+, $+\infty$.



$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(x-1)^2} + \log(x) = \frac{0}{(-1)^2} + \lim_{x\to 0^+} \log(x) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)^2} + \log(x) = \frac{1}{(0^-)^2} + \log(1) = \frac{1}{0^+} + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)^2} + \log(x) = \frac{1}{(0^+)^2} + \log(1) = \frac{1}{0^+} + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{(x-1)^2} + \log(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2-2x+1} + \lim_{x\to +\infty} \log(x) = \underbrace{0}_{\text{denom. ha grado più alto}} + \infty = +\infty$$

Da quello che sappiamo si può concludere che

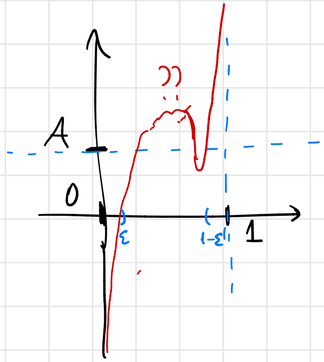
$f(x)$ è suriettiva e non è iniettiva.

Graficamente è chiaro. Giustifichiamolo "formalmente".

- suriettività: prendo $A \in \mathbb{R}$, voglio vedere che $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = A$

Visto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, per definizione di limite

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) < A$ per $x \in (0, \varepsilon)$.



Analogamente, visto che $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

$\exists\, \varepsilon' > 0$ t.c. $f(x) > A$ per $x \in (1-\varepsilon', 1)$

Prendo $x_1 \in (0, \varepsilon)$ e $x_2 \in (1-\varepsilon', 1)$.

Allora $f(x_1) < A < f(x_2)$

e per il teorema dei valori intermedi (f è continua!)

posso concludere che $\exists\, x \in (x_1, x_2)$ t.c. $f(x) = A$.

Quindi $f(x)$ è suriettiva.

Per l'iniettività il discorso è simile.. (provate a scriverlo per esercizio)

(L'esercizio 4 si fa allo stesso modo)

Esercizio 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(2x))\cdot \sin x}{\log(1+x^2)} = \frac{(1-\cos(0))\cdot \sin(0)}{\log(1+0)} = \frac{0 \cdot 0}{0} \quad \text{f. indeterm.}$$

Usiamo di nuovo i limiti notevoli.

$$\frac{(1-\cos(2x))\cdot \sin x}{\log(1+x^2)} = \frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2} \cdot (2x)^2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}}_{\to \frac{1}{2} \text{ (ponendo } t=2x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{\log(1+x^2)}}_{\to 1 \text{ (ponendo } t=x^2)} \cdot \underbrace{\frac{4x^2 \cdot x}{x^2}}_{= 4x \to 0 \text{ per } x\to 0}$$

Quindi il limite è $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$.

Esercizio 6 : $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 > |3x-1| \}$

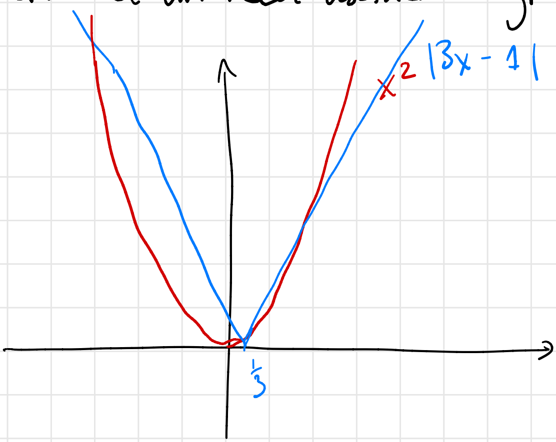
è limitato? (e da che parte).

Si potrebbe semplicemente risolvere la disequazione, e vedere se l'insieme delle soluzioni è limitato.

Ma usiamo i limiti.

Facciamoci un'idea usando i grafici di $f(x) = x^2$

$g(x) = |3x-1|$



Idea: quando x diventa molto grande o molto negativo, x^2 supererà $|3x-1|$

Quindi A non sarà limitato né inferiorm.

he' superiormente.

Infatti: $\lim_{x\to+\infty} x^2-|3x-1| = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{|3x-1|}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty}\left(1-\left|\underbrace{\frac{3x-1}{x^2}}_{\to 0}\right|\right) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty.$

Quindi per def. di limite $\exists K\in\mathbb{R}$ t.c.

$\forall x \geq K$ ho $x^2-|3x-1|>0$

quindi $x^2>|3x-1|$ $\forall x\geq K$

e da qui segue che A non e' limitato superiormente, perché contiene la semiretta $[K,+\infty)$

Allo stesso modo vedete che $\lim_{x\to-\infty} x^2-|3x-1| = +\infty$

e lo stesso ragionamento fa vedere che A non e' inferiormente limitato.

(l'esercizio 8 si fa allo stesso modo)

Esercizio 10 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) f è crescente in $\mathbb{R}$? (b) $\min\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 0$

(c) f è limitata in $\mathbb{R}$? (d) f è dispari?

(d) Sicuramente é falsa: $\underset{x \neq 0}{f(-x)} = \dfrac{e^{-x}}{(-x)^2} = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$

metto $x=2$, $f(-2) = \dfrac{e^{\cancel{2}\,-2}}{4}$

$f(2) = \dfrac{e^2}{4}$

quindi non è vero che $\forall$ $f(-x) = -f(x)$

perché $e^{-2} \neq -e^2$

Quindi $f(x)$ non é dispari.

(c) è pure falsa: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

(limite notevole: e^x cresce più velocemente di qualsiasi polinomio in x)

Quindi l'immagine di $f(x)$ non è limitata superiormente.

Per la disparità, bastava anche notare

che $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

perché $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ e $e^x > 0$, $x^2 \geq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

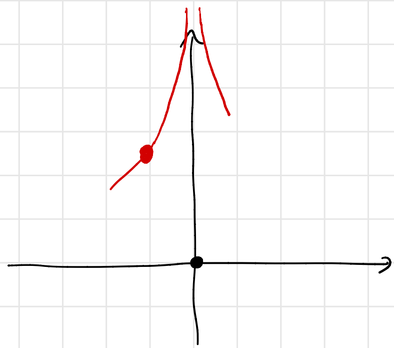
quindi non può essere dispari!
(altrimenti $f(-x) = -f(x)$ e quindi sarebbe < 0.)

(b) è <u>vera</u>, perché $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ (appena osservato)
e $f(0) = 0$, quindi segue
che 0 è il minimo (assoluto) di $f(x)$.

Per (a), per studiare la crescenza useremo le derivate.
Proviamo a guardare i limiti in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^0}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Quindi $f(x)$ non è sicuramente crescente.
Ad esempio per $x = -1$, $f(-1) = \dfrac{e^{-1}}{1} = \dfrac{1}{e} > 0$
mentre $f(0) = 0$, questo dice già che la $f(x)$
<u>non</u> è crescente.

Esercizio 5.

$$\lim_{x\to 3} \frac{(1-\cos(x-3))(e^x-1)}{x(x-3)\cdot\log(x-2)} = \frac{(1-\cos(0))(e^3-1)}{3(0)\cdot\log(1)} = \frac{0\cdot(e^3-1)}{0\cdot 0\cdot 3} = \frac{0}{0}$$

f. indeterm.

Riscrivo

$$\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1-\cos(x-3)}{(x-3)}\cdot\frac{1}{\log(x-2)}$$

$t=x-3$.

Quando $x\to 3$, ho $t\to 0$

$$\frac{e^x-1}{x}\cdot\underbrace{\frac{1-\cos(x-3)}{(x-3)^2}}_{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-3}{\log(x-2)} \to 1$$

$$\log(x-2) = \log(1+(x-3))$$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{\log(1+(x-3))} \longrightarrow 1$$

Quindi il limite è $\frac{e^3-1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{e^3-1}{6}$.