RAPPORTI DI SOMME DI INFINITI (INFINITESIMI)

Con lo stesso argomento usato per le funzioni razionali (rapporti di polinomi), basandosi sulle regole di confronto tra infiniti (infinitesimi) note, si ha:

Date $f_m(x), \dots, f_0(x)$, $g_m(x) \dots, g_0(x)$ per cui $\dfrac{f_k(x)}{f_m(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ $k \neq m$ $\dfrac{g_h(x)}{g_m(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ $h \neq m$

con $f_m(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ o $-\infty$, $g_m(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ o $-\infty$ $\left(f_m(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0,\ g_m(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0,\ \text{e } \exists\, \mathcal{U} \text{ intorno di } x_0 \right.$ $\left. f_m, g_m \neq 0 \text{ in } \mathcal{U} \setminus \{x_0\} \ * \right)$

allora se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f_m(x)}{g_m(x)}$ si ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f_m(x) + \dots + f_0(x)}{g_m(x) + \dots + g_0(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_m(x)}{g_m(x)}$$

forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

* Con il linguaggio degli "o piccoli" si migliora l'enunciato nel caso $\frac{0}{0}$

Esempio: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{e^{-x} - \log\frac{x^2+2}{x^2+1} + \sin\frac{1}{x}}{2^{-x} + \sqrt{x^2+1} - x}$ $\qquad x_0 = +\infty$

numeratore: $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, $\log\dfrac{x^2+2}{x^2+1} = \log\left(1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)$ quindi

$\dfrac{\log\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Pertanto $\dfrac{e^{-x}}{\sin\frac{1}{x}} = x\,e^{-x} \cdot \dfrac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, e

$\dfrac{\log\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\sin 1/x} = \dfrac{\log\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2+1}} \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \cdot x \cdot \dfrac{1/x}{\sin 1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\dfrac{x}{x^2+1} \to 0$

DEL NUMERATORE L'ADDENDO CHE CONTA È $\sin\dfrac{1}{x}$

denominatore: $2^{-x} + \sqrt{x^2+1} - x$

$2^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \sqrt{x^2+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \quad -x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \quad ?$

$$\sqrt{x^2+1} - x \overset{x>0}{=} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \qquad A-B = \frac{A^2-B^2}{A+B}$$

$$= x \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Quindi $\dfrac{2^{-x}}{\sqrt{x^2+1}-x} = x\, 2^{-x} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$x\,2^{-x} \to 0$, $\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right) \to 2$

DEL DENOMINATORE L'ADDENDO CHE CONTA È $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lim \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lim\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 2$

$\dfrac{\lim\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \to 1$, $\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) \to 2$

Lemma Se $f:(a;b)\to\mathbb{R}$ è CONTINUA, a e $b\in\overline{\mathbb{R}}$

A) se f è limitata (inferiormente / superiormente) in un intorno destro $\mathcal{U}$ di a e in un intorno sinistro $\mathcal{V}$ di b

allora

f è limitata (inferiormente / superiormente)

B) se inoltre vi è $x_0\in(a;b)$ t.c. $f(x_0)\le\min\{\inf_{\mathcal{U}} f\,;\,\inf_{\mathcal{V}} f\}$

allora $\exists \min_{(a;b)} f$

$x_1\in(a;b)$ t.c. $f(x_0)\ge\max\{\sup_{\mathcal{U}} f\,;\,\sup_{\mathcal{V}} f\}$

allora $\exists \max_{(a;b)} f$

Teorema di Weierstrass generalizzato

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua tale che $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = \ell_2$.

Valgono i seguenti risultati:

1) f è limitata inferiormente $\iff$ $\ell_1 \neq -\infty$ e $\ell_2 \neq -\infty$
2) f è limitata superiormente $\iff$ $\ell_1 \neq +\infty$ e $\ell_2 \neq +\infty$
3) f è limitata $\iff$ $\ell_1 \in \mathbb{R}$ e $\ell_2 \in \mathbb{R}$

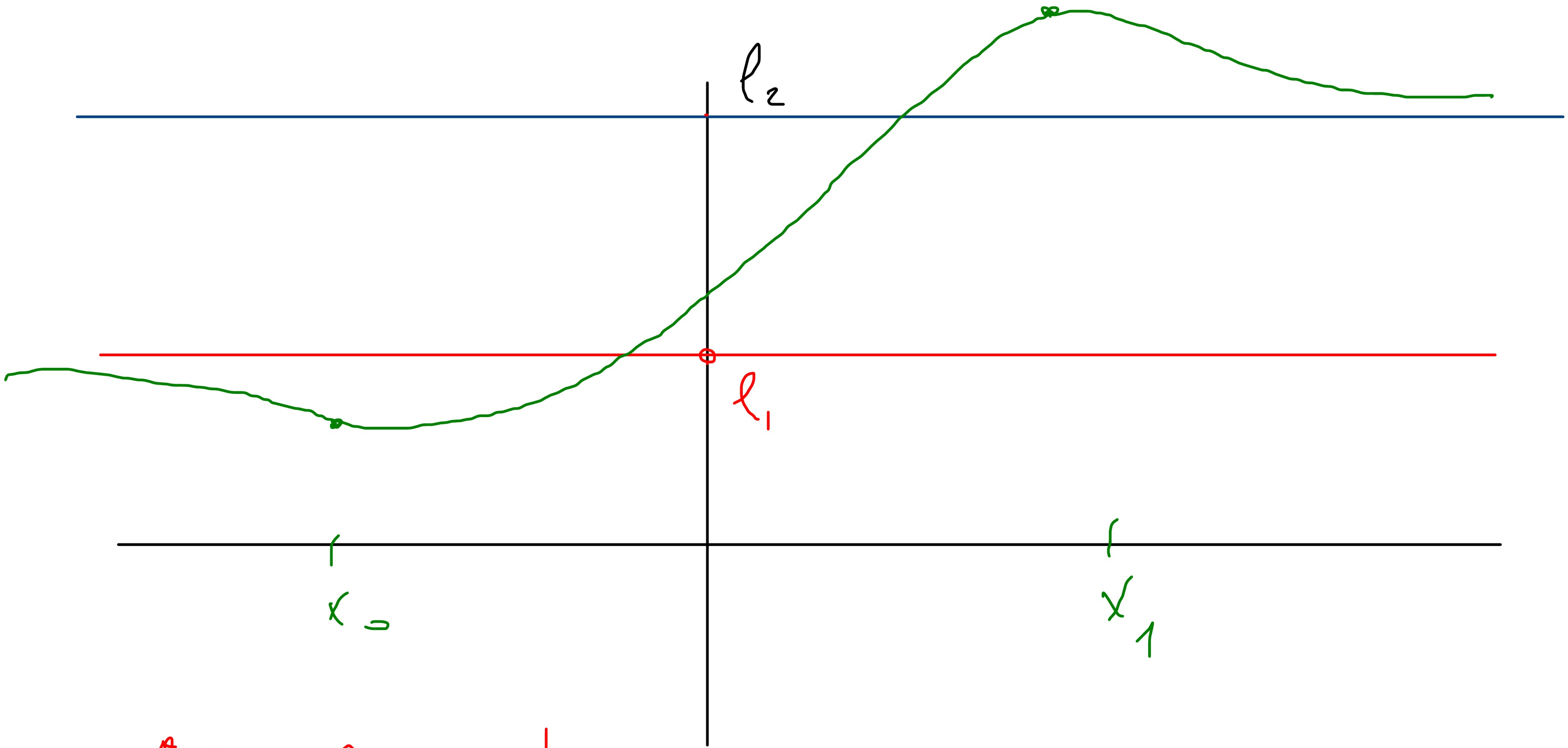
4) f ha minimo $\iff \exists\, x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$f(x_0) \leq \min\{l_1, l_2\}$$

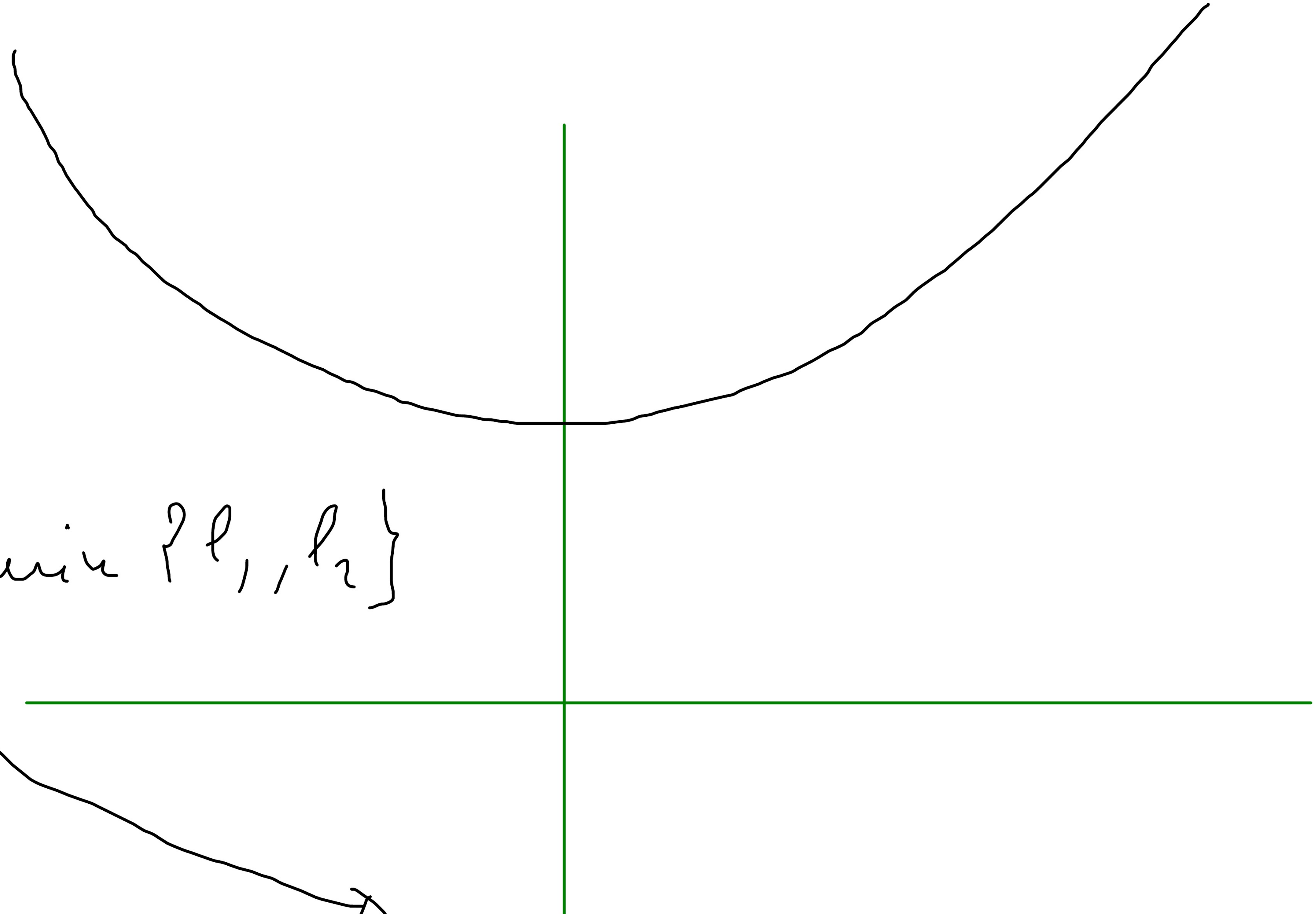
5) f ha massimo $\iff \exists\, x_1 \in (a,b)$ t.c.

$$f(x_1) \geq \max\{l_1, l_2\}.$$

Osservazione: I risultati precedenti valgono anche nel caso $a \in \mathbb{R}$ e $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ oppure $b \in \mathbb{R}$ e $f: (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (f continua).



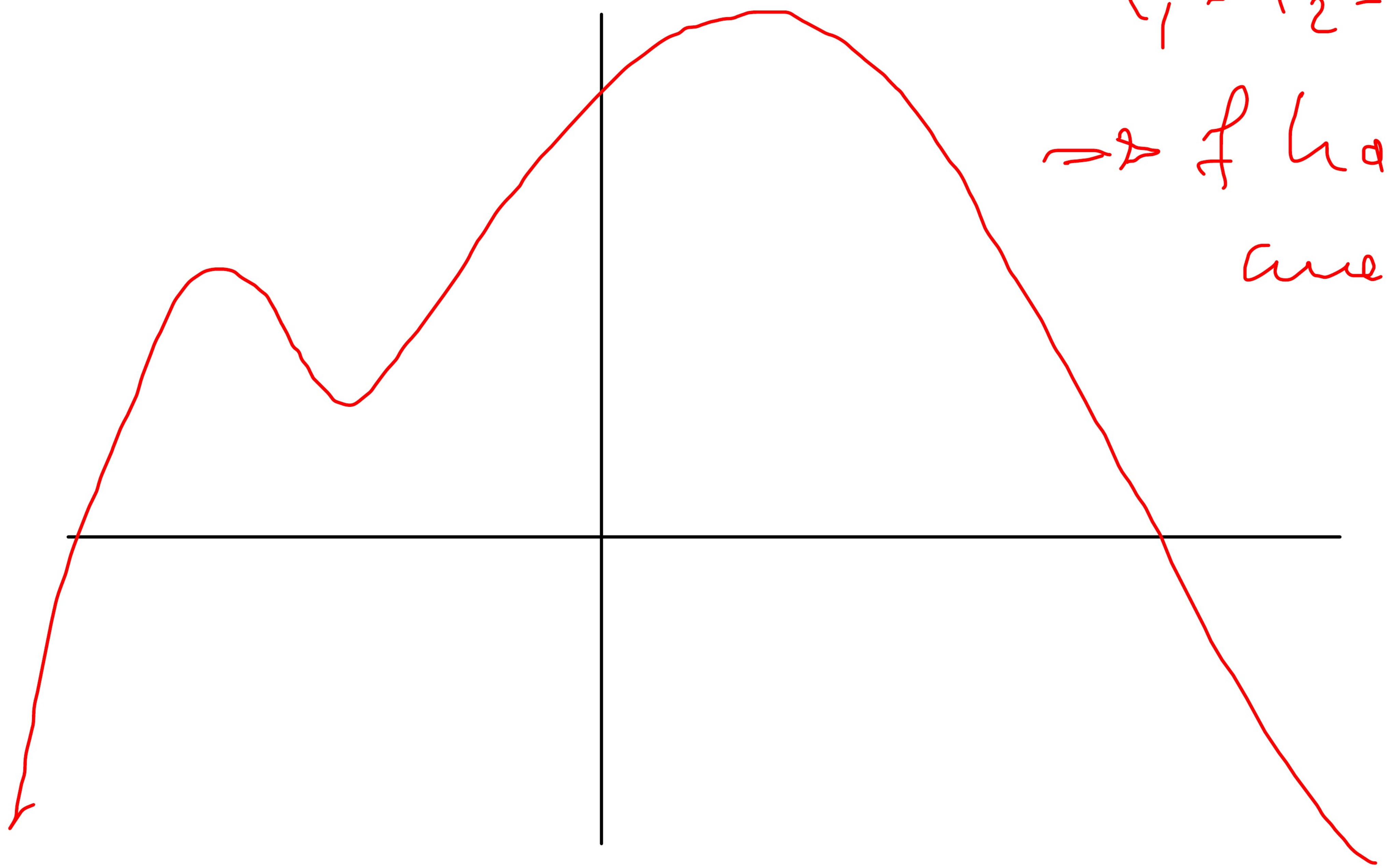
$a := -\infty \quad , b := +\infty$



$f(x) < \min\{l_1, l_2\}$

$\forall x$

$l_1 = l_2 = +\infty$ $\Rightarrow$ f ha minimo.



$l_1 = l_2 = -\infty$

$\Rightarrow f$ ha massimo.

Esempio: $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{x - x^2}$

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

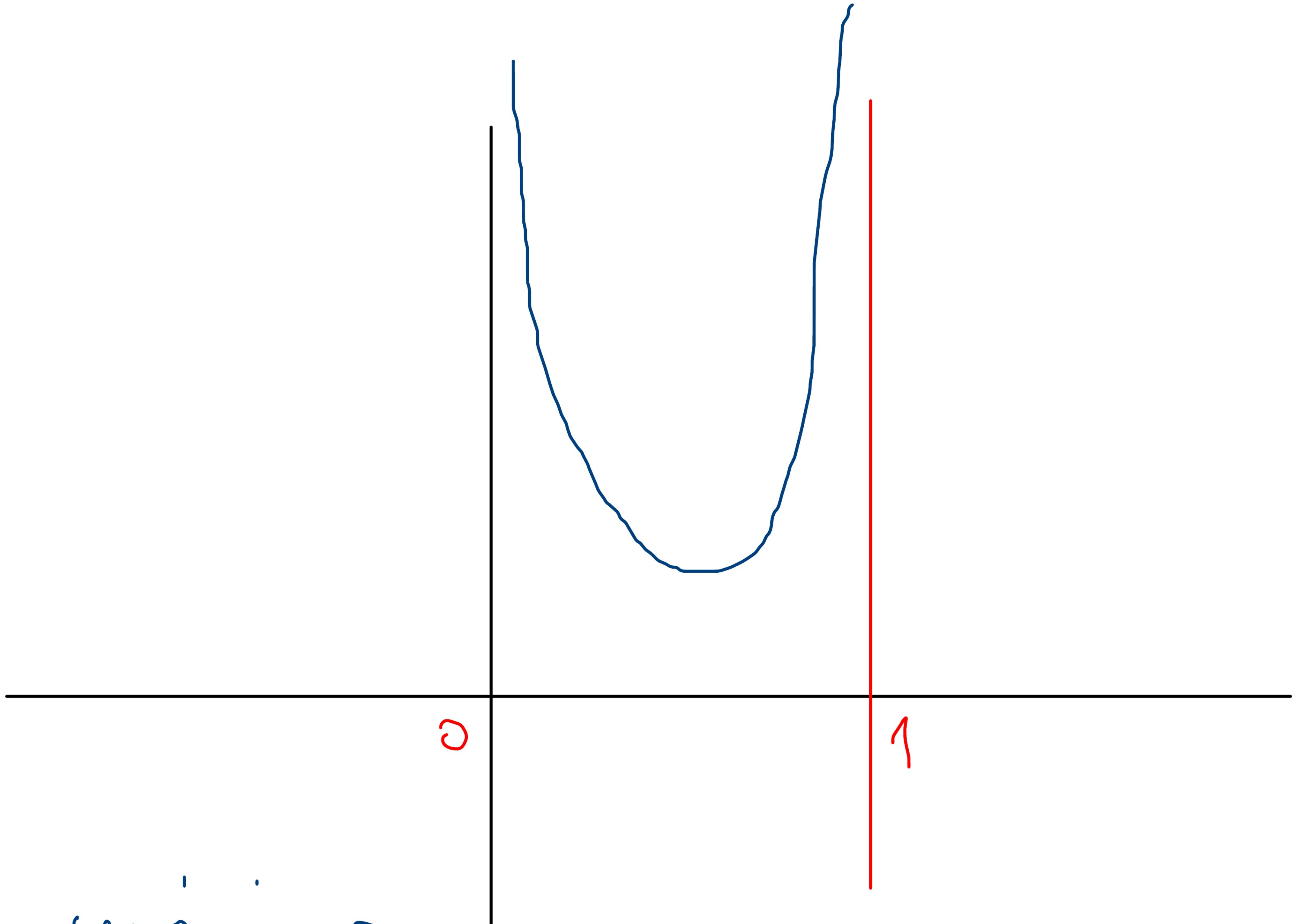
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{0^+ \cdot 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{1(1-1^-)} = \frac{1}{1 \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$x \to 1$
$x < 1$

$1 - x > 0$

$1 - x \to 0$ $\quad$ $1 - x \to 0^+$



$\Rightarrow$ f ha minimo.

$$f(x) = \frac{x^2 + x|x| + x}{1+x^2} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

ha max o min?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x}{1+x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

? $\dfrac{2x^2+x}{1+x^2} > 2$

$\cancel{2x^2} + x > \cancel{2x^2} + 2$

$x > 2$

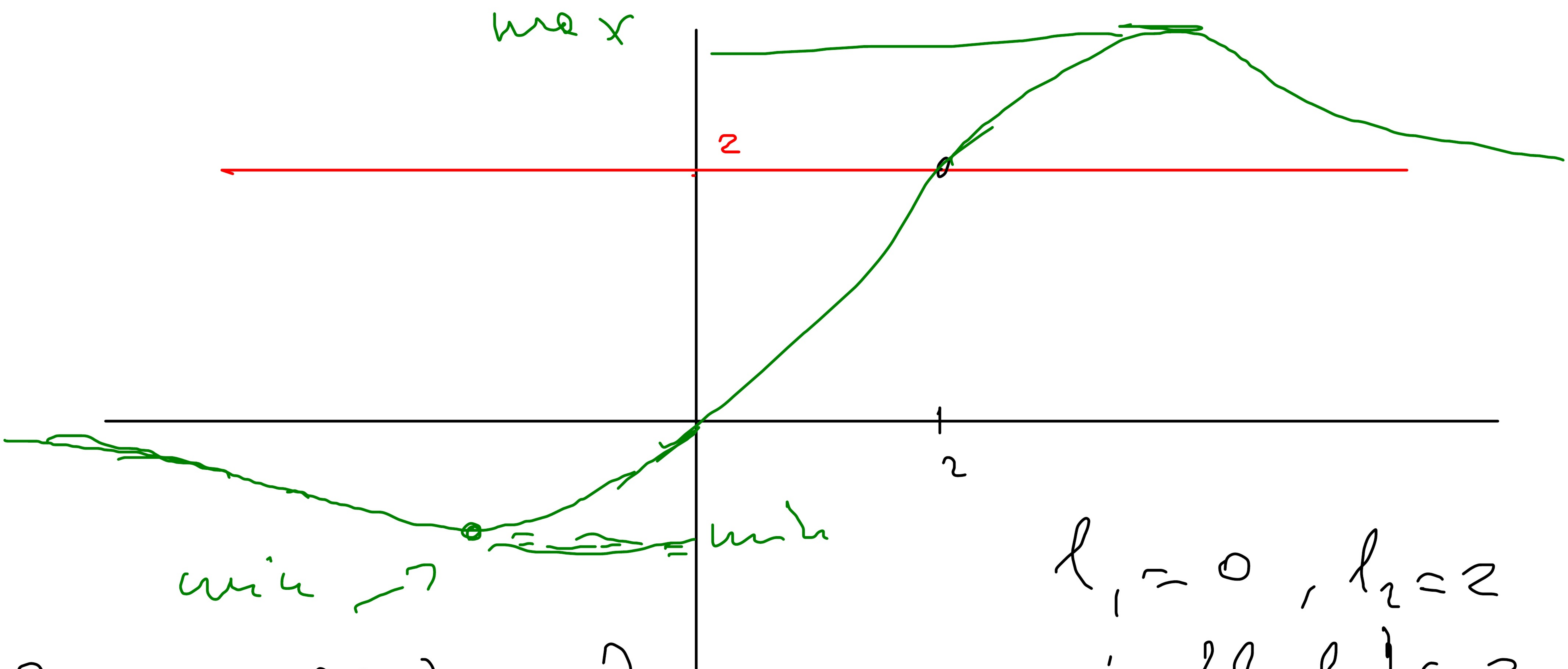
QUINDI $\exists \max f$

? $f(x) < 0$

$\dfrac{x}{1+x^2} < 0$

$x < 0$

$\exists \min f$



$$\ell_1 = 0 \,, \quad \ell_2 = 2$$

$$\min\{\ell_1, \ell_2\} = 0$$

$$\max\{\ell_1, \ell_2\} = 2$$

$$\exists \; x_0 : f(x_0) \leq 0 \; ?$$

se $x < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} < 0 \quad \forall \, x < 0$

$\Rightarrow f$ ha minimo

f ha max? $\exists\, x_1 : f(x_1) \geq 2$?

risolvo

$$\frac{2x^2+x}{1+x^2} \geq 2 \iff 2x^2+x \geq 2(1+x^2)$$

$$\cancel{2x^2}+x \geq 2 + \cancel{2x^2} \iff \boxed{x \geq 2}$$

ha soluzione $\Rightarrow$ f ha max.

Infinitesimi

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.
($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$). Si dice che f è $\boxed{\text{o-piccolo}}$ di g per $\boxed{x \text{ che tende a } x_0}$, e si scrive

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

$\mathcal{U}$ intorno di x_0

$\mathcal{U} \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

se esiste una funzione $\omega(x)$ t.c.

$$\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) = g(x) \cdot \omega(x).$$

In modo equivalente: $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0: $|f(x)| \leq |g(x)| \cdot \omega(x)$ in $\mathcal{U} \setminus \{x_0\}$

$$o(g) = \{ f : \exists\, U \text{ intorno di } x_0,\ \exists\, \omega : U \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R} \text{ t.c. } \omega \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \text{ e } f = g \cdot \omega \ U \setminus \{x_0\} \}$$

$f = o(g)$ intende $f \in o(g)$

$o(g) = o(h)$ intende $o(g) \subseteq o(h)$

Oss: Se esiste un intorno V di x_0 t.c. $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\}$ allora

$$f(x) = o(g(x)) \iff \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \omega(x) \cdot g(x) \implies \frac{f(x)}{g(x)} = \omega(x) \to 0.$$

$$g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \qquad x_0 = 0 \qquad \sin\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = 0 \quad \frac{1}{2n\pi} \to 0$$

x

Es: $f(x) = x^3 \qquad g(x) = x^2$

$\Rightarrow \quad f(x) = o(g(x)) \quad$ per $\quad x \to 0$.

infatti $\quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^3}{x^2} = x \longrightarrow 0 \quad$ per $x \to 0$.

$f(x) = g(x) \cdot x$ — $\omega(x)$ e $\omega(x) \to 0$.

$x^3 = x^2 \cdot x$

Ma $\quad g(x) = o(f(x)) \quad$ per $x \to +\infty$!

Proprietà degli o-piccoli

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.

Tutti gli o-piccoli si intendono per $x \to x_0$.

1) $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$

2) Se $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0 \Rightarrow o(kg) = o(g)$

3) $o(g) + o(g) = o(g)$

$\omega = f$

4) se $\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0}$ $\Rightarrow f(x) \cdot g(x) \subseteq o(g(x))$

$f = o(1)$ $x \to x_0$

$h = o(g)$ $x \to x_0$? $h = \omega f g$?

$x_0 = 0^+$ $x = f$ $g = x$ $x^{3/2} = o(x)$

$x^{3/2} \notin o(x^2)$

5) se $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ allora

$\subseteq$ $\quad o(g) + o(fg) = o(g)$

$\omega g \qquad \bar{\omega} f g \qquad = g(\omega + \bar{\omega} f)$

più facile è

$o(g) + o(o(g)) \Rightarrow o(g)$

6) $o(o(g)) \subsetneq o(g)$.

$f=o(h)$, $h=o(g)$ $\Longrightarrow$ $f\in o(g)$

$\not\Leftarrow$

7) $o(f+g) \subsetneq o(f) + o(g)$

$f=x+x^2$, $g=-x$ $\quad (x\to 0)$

$f+g=x^2 \qquad x^{3/2}=o(f)$

$x^{3/2}\notin o(x^2) \qquad \dfrac{x^{3/2}}{x+x^2} = \dfrac{x^{1/2}}{1+x}$

$x^{3/2}=o(g)$

8) $o(g)\cdot o(f) = o(gf)$.

$\ast \qquad o(|g|) = o(g)$

$\ast,\ast \quad |f| = o(g) \iff f = o(g)$

$k \in \mathbb{R}$

Oss: $o(g) - o(g) = o(g) + \boxed{(-1)}\, o(g) =$

$= o(g) + o(-1 \cdot g) = o(g) + o(g) = o(g)$.

Es: $x^3 = o(x^2)$ $\qquad$ $x^4 = o(x^2)$

$x^3 - x^4 \neq 0$.

$o(g) - o(g) = o(g)(1 - 1) = 0$

Oss: li useremo molto spesso con $g =$ potenza di x (o di $x - x_0$).

$g(x) = (x - x_0)^p \quad x \to x_0$, $\quad g(x) = x^p \quad x \to +\infty$ $(-\infty)$

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha > \beta \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} x^{\alpha} = o(x^{\beta}) \\ x \to 0 \end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c} x^{\beta} = o(x^{\alpha}) \\ x \to +\infty \end{array}}$

perché $x^{\alpha} = x^{\beta} \cdot x^{\alpha - \beta}$

$\Rightarrow \omega(x) = x^{\alpha-\beta} \longrightarrow 0$ perché $\alpha > \beta$.

$$\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta} \longrightarrow 0 \quad \text{perché } \alpha > \beta$$

$$x^{5} = o(x^{3}).$$

Es: $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin x$. per $x \to 0$

Dico che $f(x) = o(x)$. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \sin x}{x} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}}}_{\to 1} = 0 \cdot 1 = 0$$

$\Rightarrow f(x) = o(x)$

RAPPORTI DI SOMME DI INFINITI (INFINITESIMI)

Si rienuncia il criterio dato all'inizio della lezione con la notazione degli "o":

se $f_k = o(f_n)$, $k \neq n$ e $g_h = o(g_m)$, $h \neq m$ per $x \to x_0$

ed $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x)}{g_m(x)}$ allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) + \ldots + f_0(x)}{g_m(x) + \ldots + g_0(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x)}{g_m(x)}$$

DIM $f_k(x) = \omega_k(x) \cdot f_n(x)$ e $g_h(x) = \eta_h(x) \cdot g_m(x)$ in un intorno di x_0 per $k \neq n$, $h \neq m$ con $\omega_k \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, $\eta_h \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$. Quindi in tale intorno

$$\frac{f_n(x) + \ldots + f_0(x)}{g_m(x) + \ldots + g_0(x)} = \frac{f_n(x)}{g_m(x)} \cdot \frac{1 + \underbrace{\omega_{n-1}(x) + \ldots + \omega_0(x)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}}{1 + \underbrace{\eta_{m-1}(x) + \ldots + \eta_0(x)}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}}$$

Sviluppi al primo ordine

$\frac{f}{g} \xrightarrow{x\to x_0} L \neq \pm\infty$ $\Updownarrow$ $f = Lg + o(g)$ $x \to x_0$

$\frac{f}{g} - L \longrightarrow 0$ $\quad \frac{f - Lg}{g} \longrightarrow 0$

Dai limiti notevoli sappiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0 \quad \text{quindi,}$$

per definizione $\Rightarrow$ $\sin x - x = o(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sin x = x + o(x)}$ per $x \to 0$.

$\sin x - x = o(x)$ $x \to 0$ i.e. $\frac{\sin x - x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 0$

errore

relativo

Dal limite $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

ottengo, come prima, che

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \quad x \to 0$$

$$\frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\frac{f}{g} \xrightarrow[x \to x_0]{} L \neq \pm\infty \quad \sim \quad f = Lg + o(g) \quad x \to x_0$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = x + o(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = 1 + x + o(x)} \quad \text{pr } x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\log(1+x) = x + o(x)} \quad \text{pr } x \to 0.$$

Es: $(\operatorname{tg} x)^2 = ?$ in termini di o-piccoli? $x \to 0$

limite notevole

$$\operatorname{tg} x = x + o(x)$$

reg 1 e 2   reg 8

$$\Rightarrow (\operatorname{tg} x)^2 = (x + o(x))^2 = x^2 + 2x \cdot o(x) + (o(x))^2$$

$$= x^2 + o(2x^2) + o(x^2) = x^2 + o(x^2) + o(x^2)$$

$$= x^2 + o(x^2)$$

$$(\operatorname{tg} x)^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} = ?$$

$\sin x = x + o(x)$ limite notevole $x \to 0$

$\Rightarrow \sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$

$$\cos(\sin^2 x) - 1 = \cos(\underbrace{\overbrace{x^2 + o(x^2)}^{t}}) - 1$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{se } t \to 0$$

limite notevole

sostituzione $t = x^2 + o(x^2)$

$$\cancel{1} - \frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2} + o\left((x^2 + o(x^2))^2\right) - \cancel{1} = -\frac{1}{2}(x^4 + o(x^4)) + \underbrace{o(x^4 + o(x^4))}_{o(x^4)}$$

$$= -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

posso fare la sostituzione?

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ vale se $t \to 0$

se $t = x^2 + o(x^2)$ ottengo che se $x \to 0$

$x^2 + o(x^2) \longrightarrow 0$ quindi $t \to 0$

e posso sostituire.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2} +$$

$$+ o\left(\frac{(x^2 + o(x^2))^2}{2}\right) =$$

$$1 - \frac{x^4 + 2x^2 o(x^2) + (o(x^2))^2}{2} + o\left(\frac{\left(x^4 + 2x^2 o(x^2) + o(x^2)\right)^2}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^4 + o(x^4) + o(x^4)}{2} + o\left(\frac{x^4 + o(x^4) + o(x^4)}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\frac{\cos(\sin^2 x) - 1}{x^4} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \cancel{-1}}{x^4} =$$

$$\frac{-\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{2}+\boxed{\frac{o(x^4)}{x^4}}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin^2 x)-1}{x^4}=-\frac{1}{2}.$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$

Se ~~∃~~ ∃ $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x)| \leq M |g(x)| \quad \forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$$

dove U è un intorno di x_0, allora

si dice che f è O-grande di g

per x che tende a x_0 e si scrive

$$f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to x_0 .$$

Oss: Se g non si annulla in un intorno di x_0 $\Rightarrow$

$$f = O(g) \iff \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$$

in un intorno di x_0.

Es: $f(x) = x \sin x$, $g(x) = x$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \left| \frac{x \sin x}{x} \right| = |\sin x| \leq 1.$$

quindi

$f(x) = O(g(x))$ per $x \to x_0$

per qualunque $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.

(infinitesime per $x \to x_0$ (cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$)). Se esistono $L, \alpha \in \mathbb{R}$

con $L \neq 0$ tali che qualora le potenze di $g(x)$ siano ben definite in $U \setminus \{x_0\}$, U int. di x_0:

$$f(x) = L\,(g(x))^{\alpha} + o\left((g(x))^{\alpha}\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

si dice che f è infinitesima

di ordine α rispetto a g con

parte principale $L(g(x))^{\alpha}$ $x \to x_0$

per x che tende a x_0.

(Stessa definizione nel caso in cui f e g siano divergenti

(cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$))

RIASSUMENDO $L(g(x))^\alpha$ è p.p. di f rispetto a g per $x \to x_0$

$$\exists L \neq 0 \quad f(x) = L \cdot (g(x))^\alpha + o\left((g(x))^\alpha\right) \quad x \to x_0$$

qualora le potenze di g siano ben definite in $U \setminus \{x_0\}$, U intorno di x_0.

In particolare se $\alpha = 0$ dovrà essere $g(x) \neq 0$ in qualche $U \setminus \{x_0\}$.

$$\left(f(x) = L + o(1) \quad x \to x_0 \right)$$

Es: $f(x) = 3\sin x + x^2$, $g(x) = x$

$x_0 = 0$

f è di ordine 1 rispetto a g

per $x \to 0$. con parte principale $3x$

Infatti $3\sin x + x^2 = 3x + o(x)$

$(\sin x = x + o(x)) \Rightarrow 3\sin x + x^2 = 3x + o(x) + x^2$

$= 3x + o(x)$.

$O(x^2)$ $|2\sin x|x^2 \le 2x^2$

Es: $f(x) = 5x^4 + \boxed{(2\sin x)\cdot x^2 + 3x}$, $g(x) = x$

f è di ordine 4 rispetto a x per $\boxed{x \to +\infty}$ con parte principale $5x^4$

$O(x^2) \subseteq o(x^4)$

$o(x^4)$

$f(x) = 5x^4 + o(x^4)$

infatti $\dfrac{2\sin x \cdot x^2 + 3x}{x^4} \to 0$ per $x \to +\infty$.

Per $\boxed{x \to 0}$ $f(x) = 3x + o(x)$

$\log(e^{3x}) = 3x$

Es: $f(x) = \log(e^{3x} + x^2)$ per $x \to +\infty$

$\log(1+t) = t + o(t)$, $t \to 0$

$$\log(e^{3x} + x^2) = \log\left(e^{3x}\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)\right) =$$

$$= \log(e^{3x}) + \log\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right) = \underline{3x} + \underbrace{\log\left(1 + \frac{x^2}{e^{3x}}\right)}_{\downarrow 0}$$

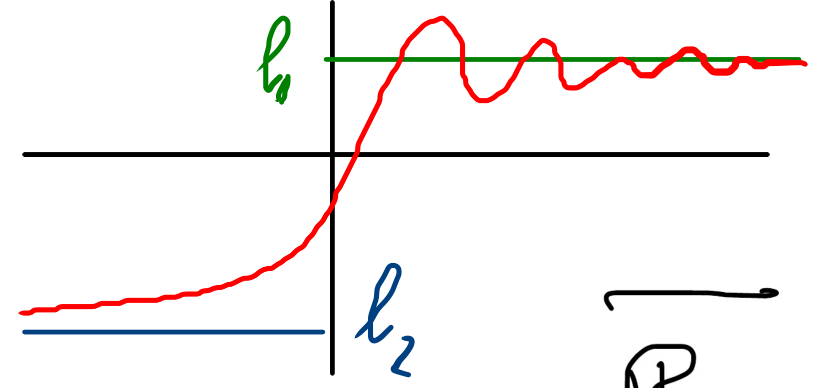
$$= 3x + \frac{x^2}{e^{3x}} + o\left(\frac{x^2}{e^{3x}}\right) = 3x + o(x)$$

$f(x)$ è di ordine 1 <u>rispetto</u> a x per $x \to +\infty$ con parte principale $3x$ per $x \to +\infty$

$$f(x) = 3x + o(x)$$

$x \to +\infty$ $\quad o(1) \subset o(x)$

Asintoti

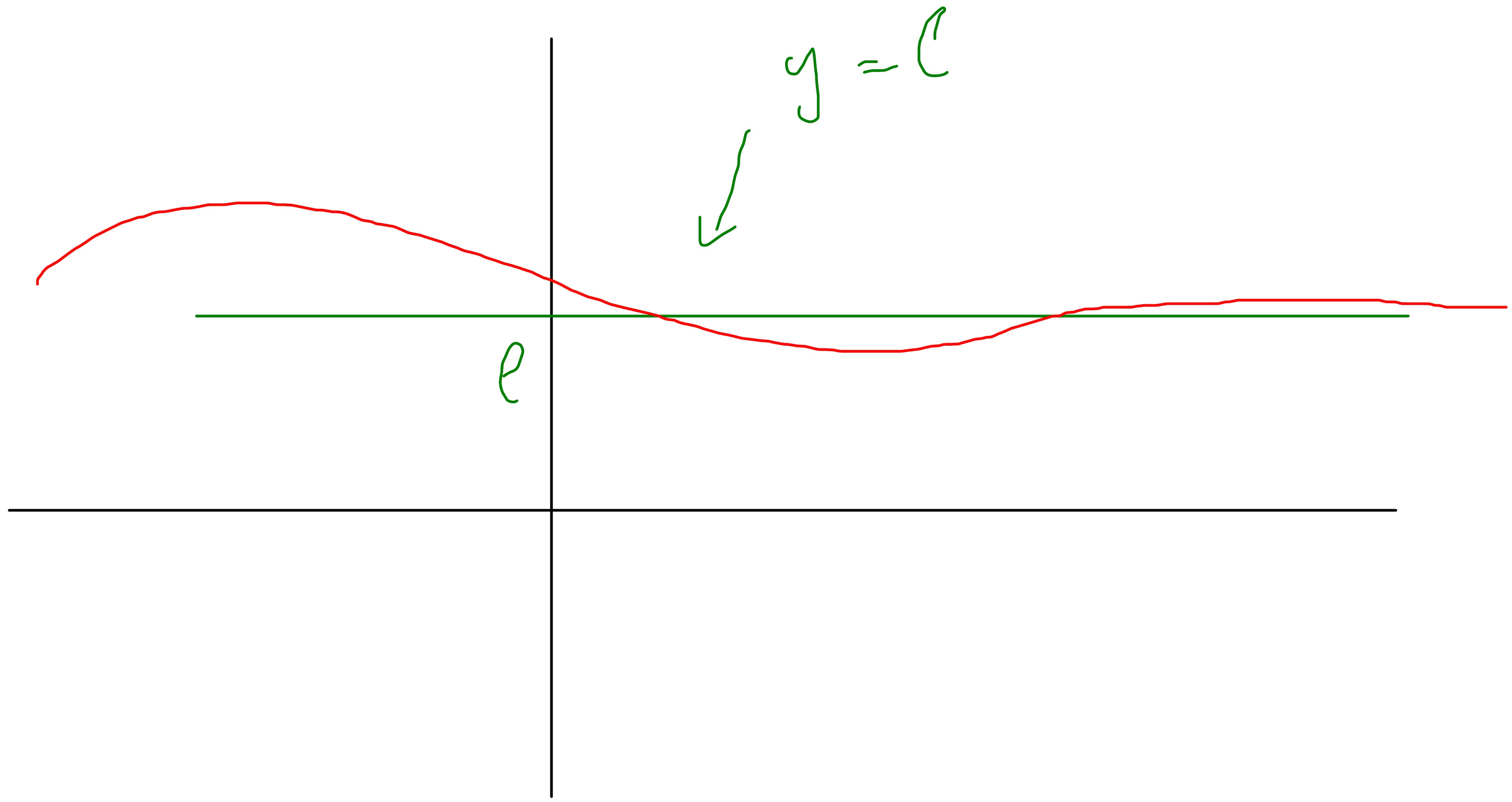


Def: $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se esiste $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (finito)

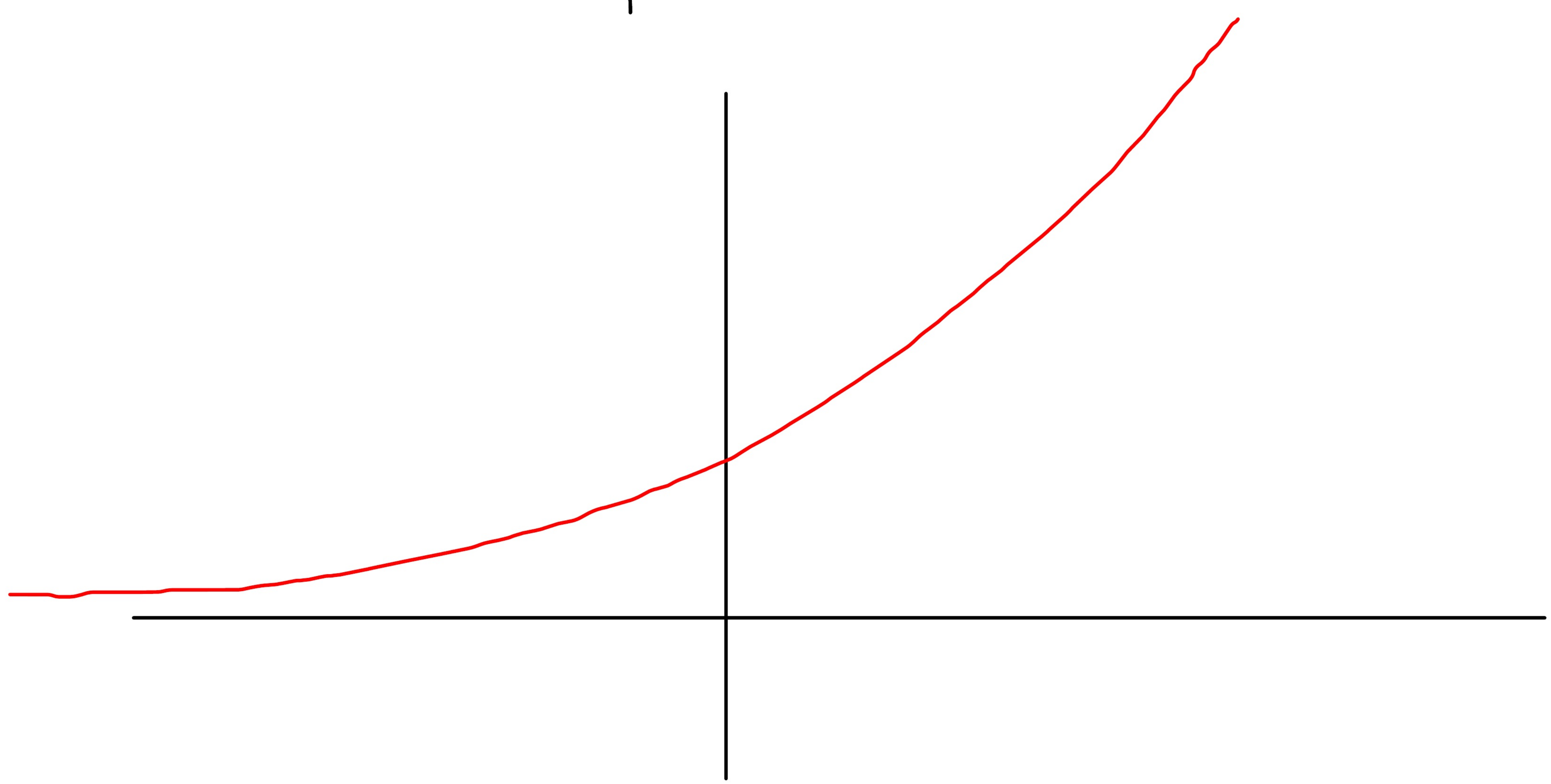
$\Rightarrow$ si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = \ell$ per x che tende a $+\infty$.

La stessa definizione vale se $x \longrightarrow -\infty$.


$y = \ell$
ℓ

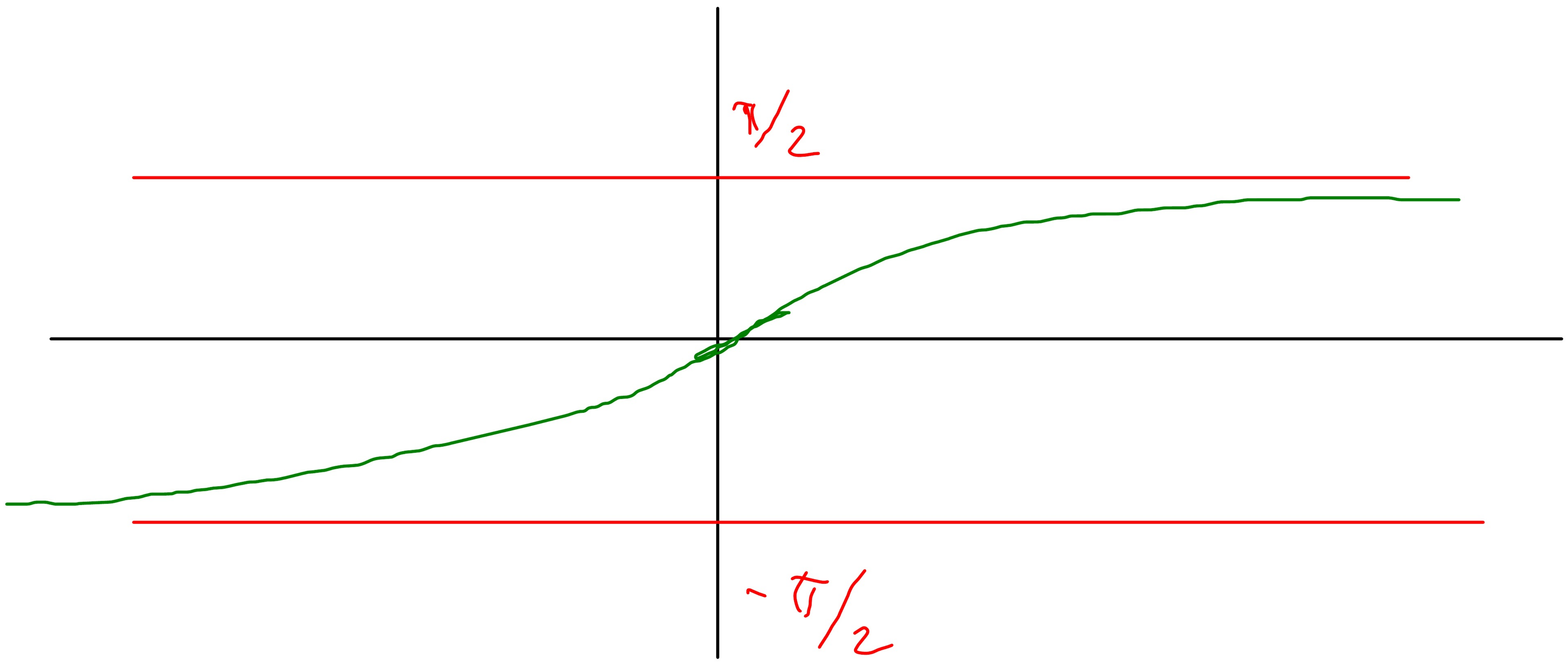
Es: $f(x) = e^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$

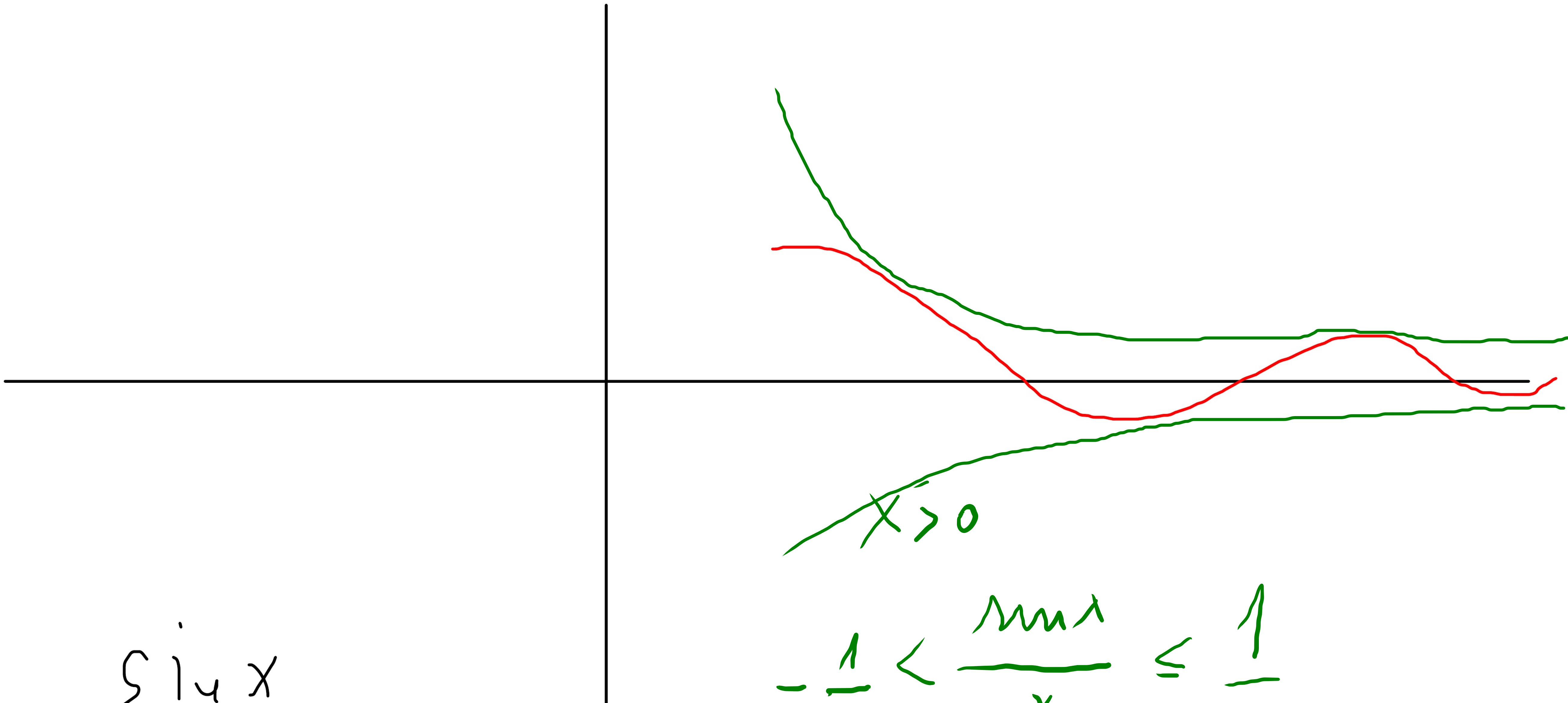


Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$



Es: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$



$x > 0$

$$-\frac{1}{x} < \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

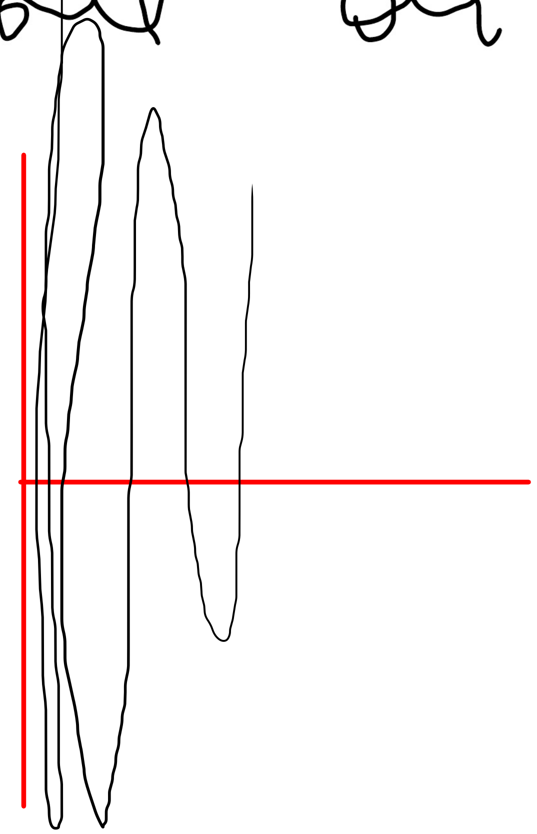
$\to 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Acc}(A)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se f diverge per x che tende a x_0 da destra o da sinistra (o da entrambe le parti) si dice che f ha un asintoto verticale di equazione $x = x_0$.

NO

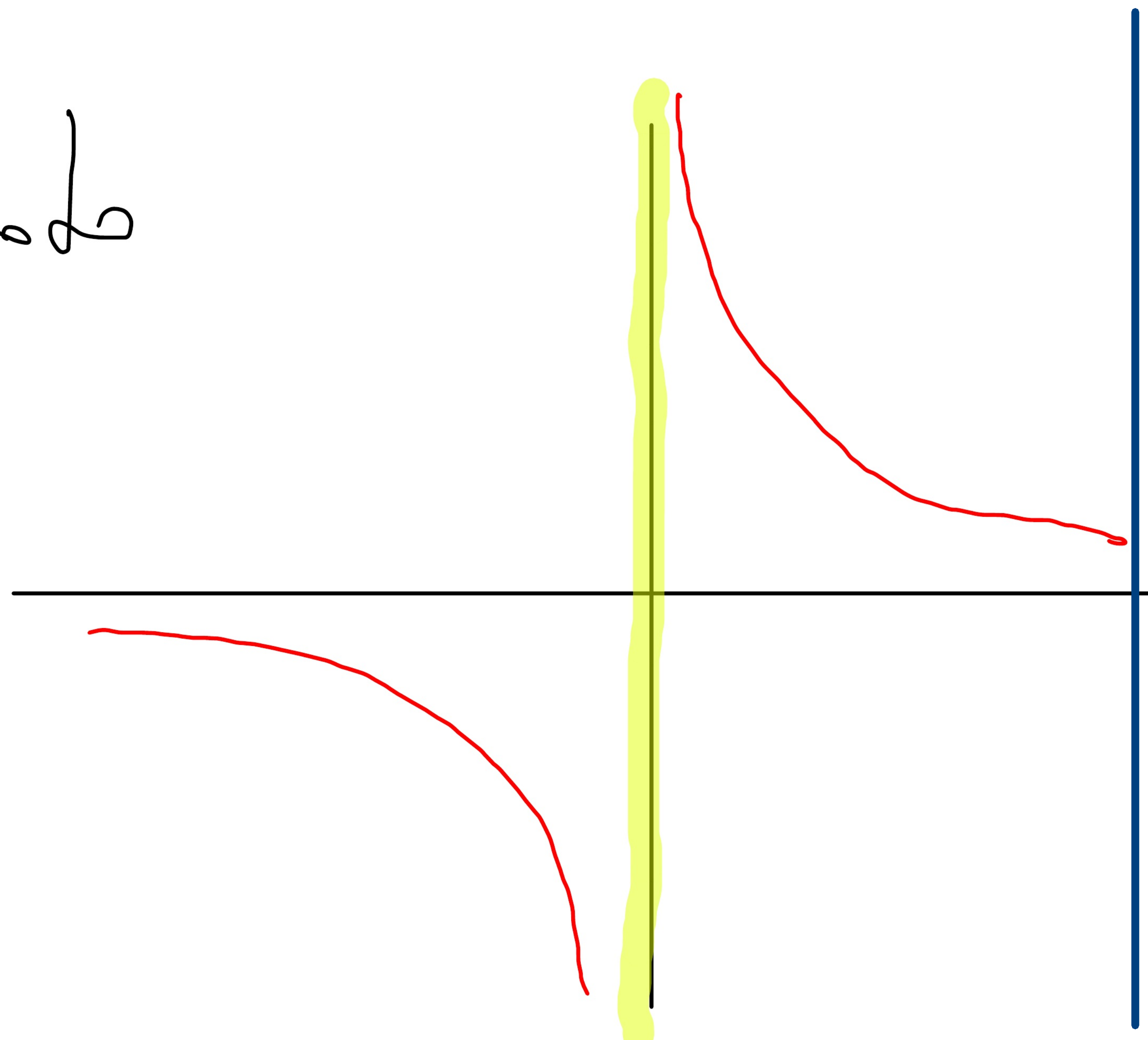


Es. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

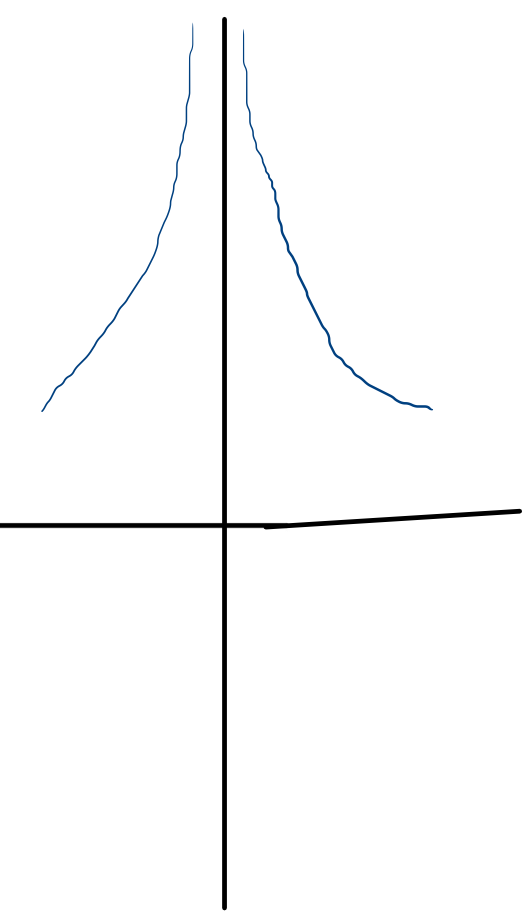
$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

f ha un asintoto verticale di equazione

$x = 0$.



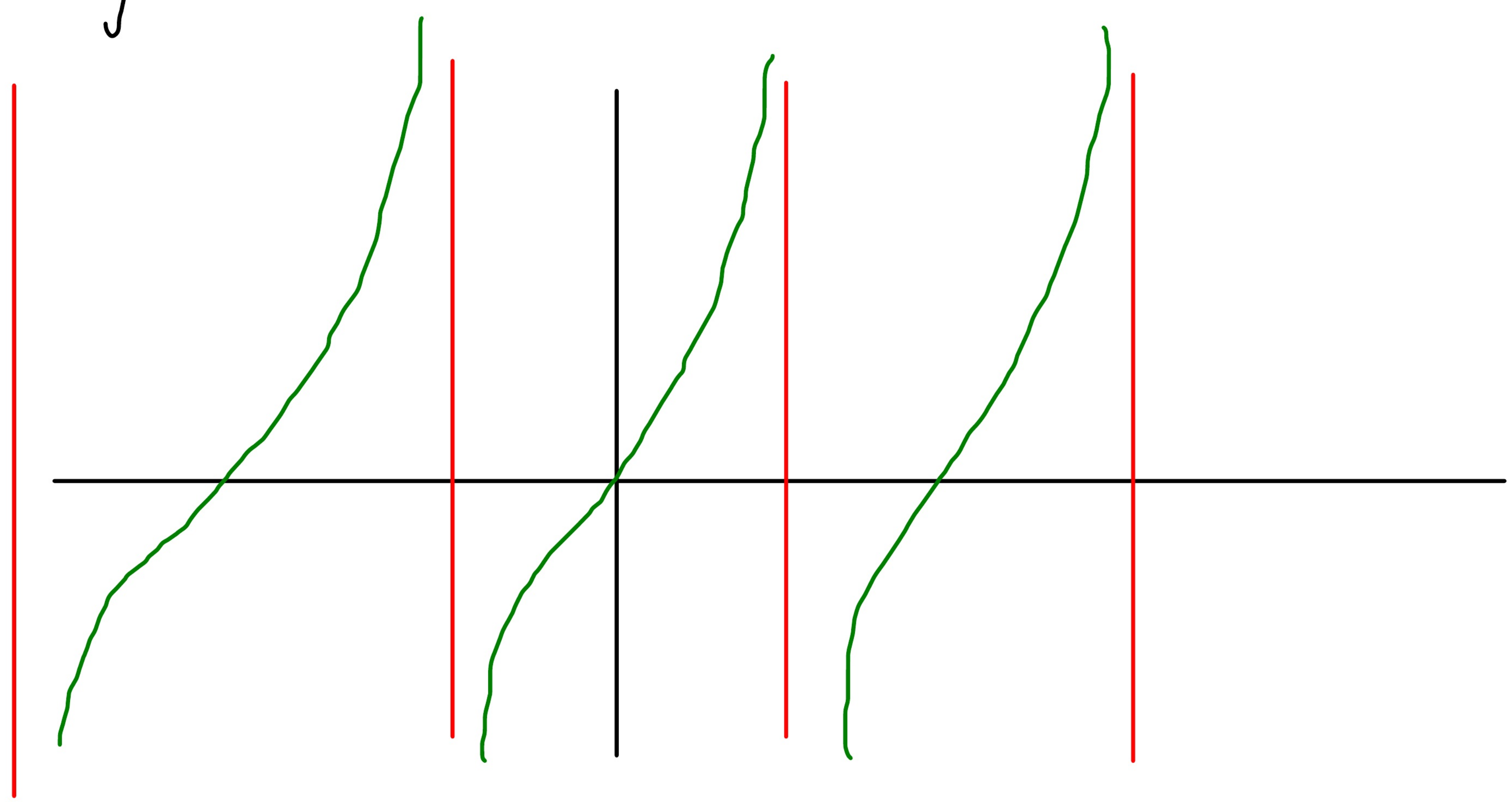
$f(x) = \frac{1}{x^2}$



$\exists \lim_{x \to 0} f = +\infty$

Oss: Una funzione al massimo ha 2 asintoti orizzontali (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$) ma può anche avere ∞ asintoti verticali.

Es: $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha ∞ asintoti verticali



Def: $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Se esiste

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R} \text{ con } m\neq 0$$

$f(x)=mx+o(x)$ $x\to\infty$

e esiste anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=q\in\mathbb{R}$$

allora si dice che f ha un asintoto obliquo di equazione $y=mx+q$ per $x\to+\infty$. Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x-5} = \dfrac{2x + 3/x + 2/x^2}{1 - 5/x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x} = 2 \neq 0$$

$m = 2$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{2x^2}+3x+2-\cancel{2x^2}+10x}{x-5} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13$$

$y = 2x+13$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Oss: Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$). Inoltre non può avere contemporaneamente un asintoto orizzontale ("e uno obliquo "dallo stessa parte")

$f(x) = 3x + o(x) \quad x \to +\infty \iff \frac{f(x)}{x} \to 3 \quad x \to +\infty$

ES:

$f(x) = 3x + 5\log x \qquad f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5\log x}{x} =$$

$$= 3 + \lim_{x \to \infty} \frac{5\log x}{x} = 3 + 0 = 3 = m$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \cancel{3x} + 5\log x - \cancel{3x}$$

$= +\infty$. $\Rightarrow q$ non è finito

$\Rightarrow$ non c'è asintoto obliquo.