<u>Def</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

Se esiste il limite

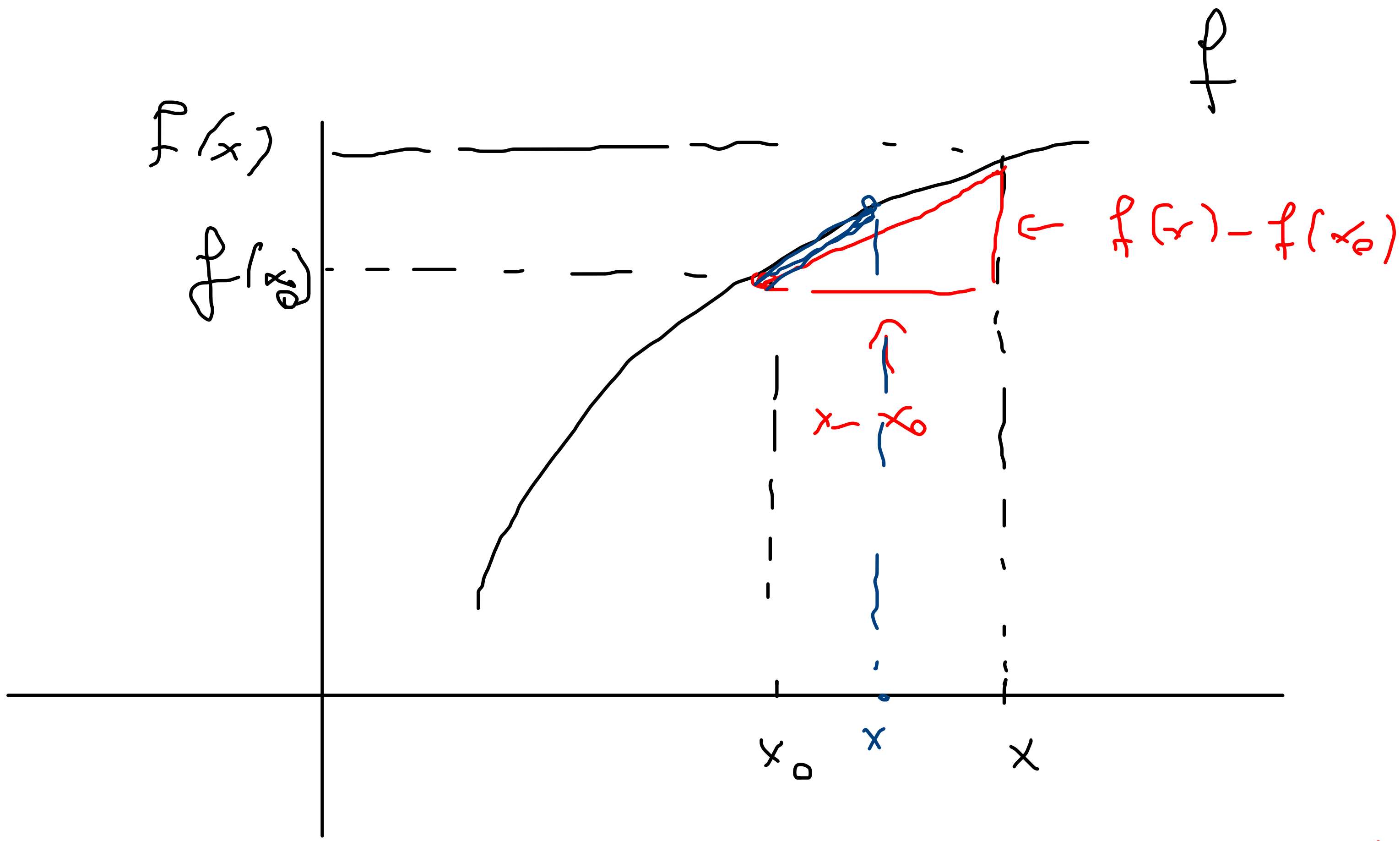
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$$

allora ℓ si dice derivata di f in x_0

Se $\ell \in \mathbb{R}$ (è finito) allora f si dice derivabile in x_0

La derivata si indica con $f'(x_0)$ oppure $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

quindi $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rapporto incrementale

Oss: l'esistenza della derivata e la derivabilità sono due cose diverse perché la derivata potrebbe valere anche $\pm\infty$. In tal caso f non è derivabile ma esiste la derivata.

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

calcoliamo la derivata in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} =$$

x_0 $\quad$ x_0 $\quad$ x_0

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$f'(0) = +\infty$ e f non è derivabile in $x_0 = 0$.

Teorema: Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

Dim: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) + f(x_0) \right) =$

$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) =$

$= f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) =$

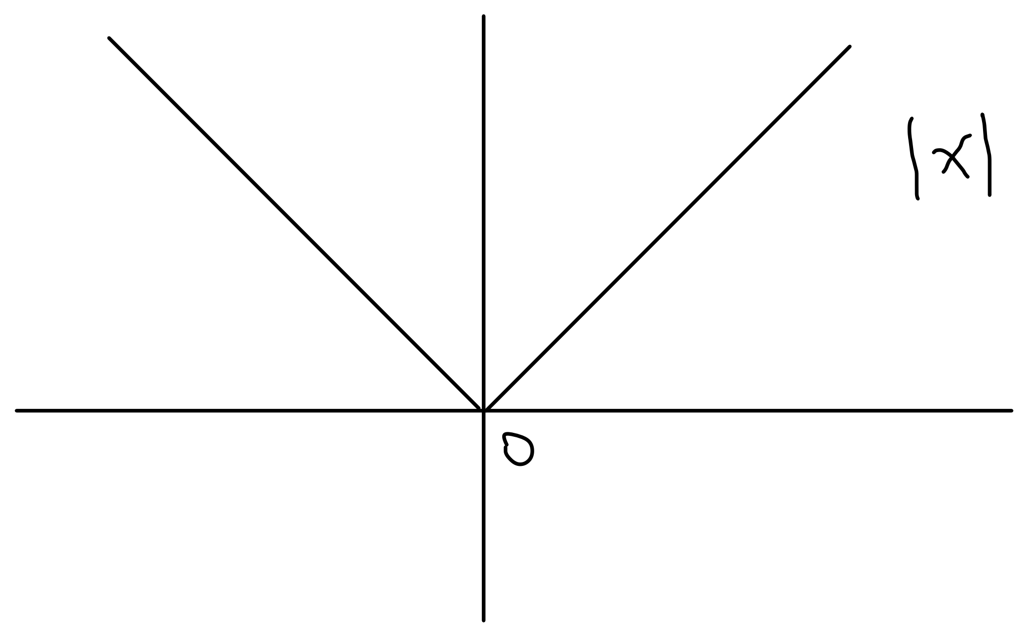
$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0) \cdot 0}^{0} =$

$= f(x_0) + 0 = \boxed{f(x_0)}$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ quindi f è continua in x_0

Il viceversa è vero? f continua $\Rightarrow$ f derivabile?

Es: $f(x) = |x|$



$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

ma $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}\right\}$$

sono diversi quindi non esiste il limite.

quindi non esiste la derivata di $|x|$ in $x_0 = 0$.

$\Rightarrow$ in generale f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile.

<u>Def</u>: Se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

questo si chiama derivata destra di f in x_0

Invece $\displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si dice derivata

sinistra. Si indicano con $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$.

Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se

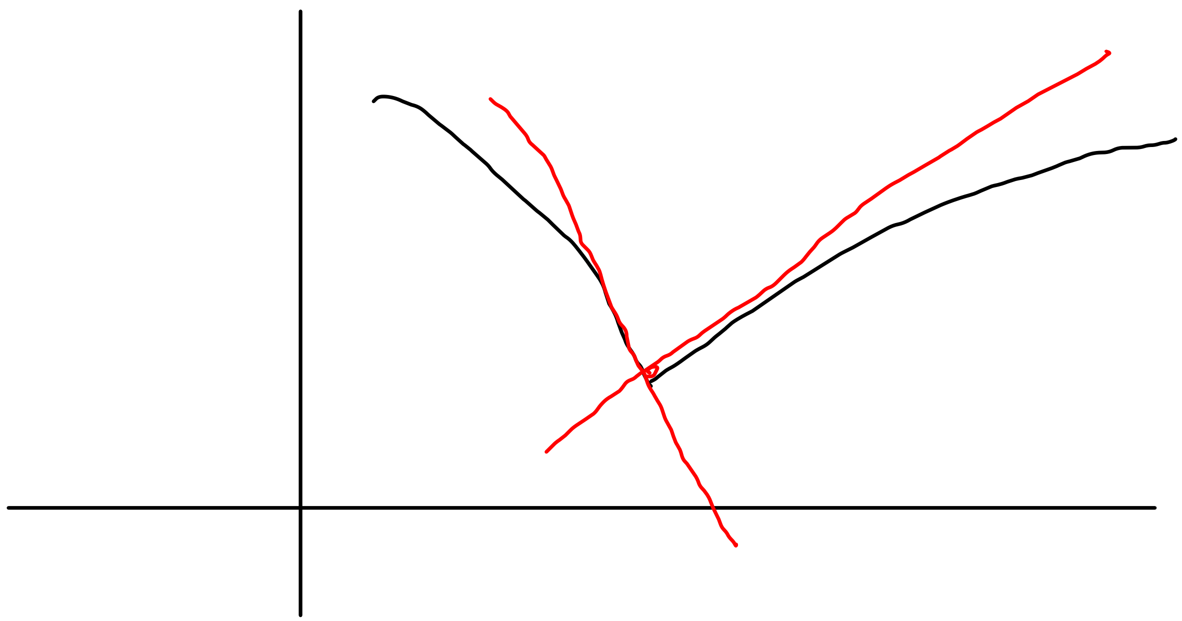
$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite.

Es: $f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1 \qquad f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$

quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

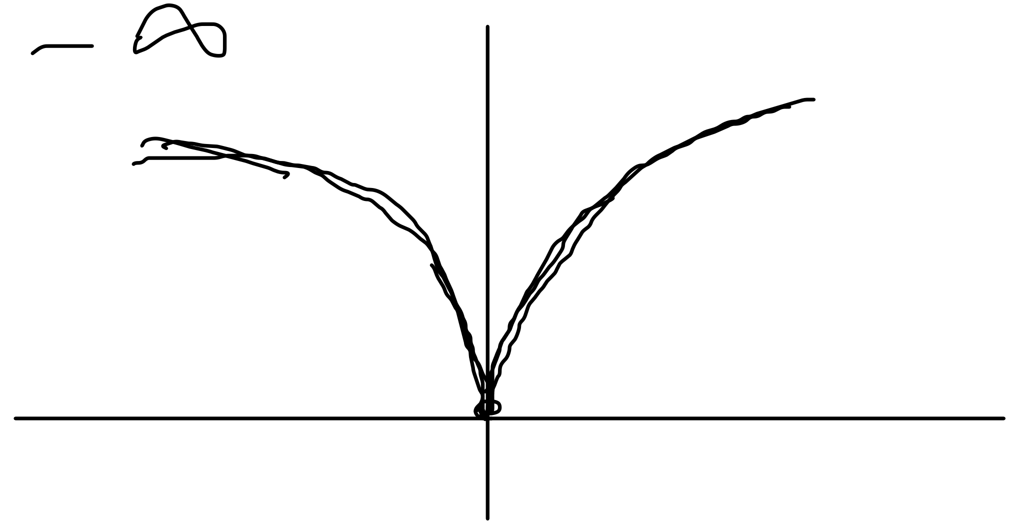
Def: Se esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ entrambe finite ma diverse tra loro allora x_0 si dice punto angoloso.



Def: Se $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$ (o viceversa) il punto x_0 si dice punto di cuspide.

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$



Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

per $x \to x_0$.

Infatti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

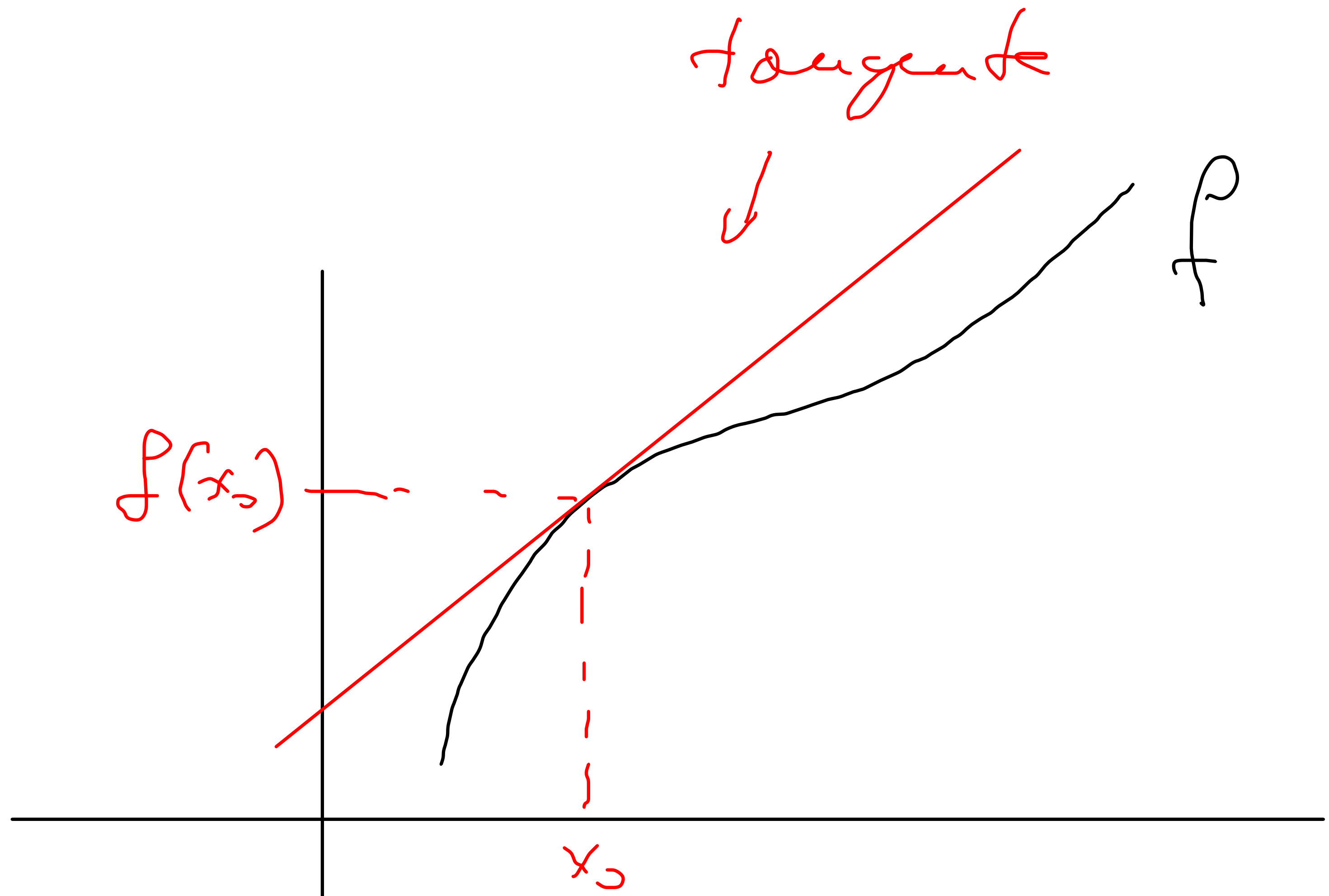
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0)$$

Def: Se f è derivabile in x_0 allora la retta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si dice retta tangente al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.



il coeff. angolare della retta tangente è $f'(x_0)$.

$f : A \to \mathbb{R}$ supponiamo che f sia derivabile in ogni punto $x \in A$.

Allora $\exists\, f'(x)$ $\forall x \in A$ e costruisco la funzione derivata di f

$$f' : A \to \mathbb{R}.$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

Se la funzione f' è a sua volta derivabile posso calcolarne la derivata che chiamo derivata seconda di f e indico con f''.

Quindi $f'' = (f')'$.

Posso in questo modo definire le derivate successive di f.

$$f''' = (f'')'$$

$$f^{(4)} = (f''')'$$

$$\dots$$

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Per convenzione si indica con $f^{(0)}$ la funzione stessa

$$f^{(0)} = f.$$

Def: Dato $n \in \mathbb{N}$ si dice che f è di classe C^n se f è derivabile n-volte e $f^{(n)}$ è continua.

Teorema: Se f e g sono funzioni derivabili in x_0 allora

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

3) se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è derivabile in x_0

e
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

Oss: Se f, g sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$
allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Derivate delle funzioni elementari

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' =$

$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \qquad \rightarrow g'(x) = 2x$

$h(x) = x^3 \qquad h'(x) = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' =$

$= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(x^7)' = 7 \cdot x^6$$

Derivata di e^x in $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0}\left(e^{x-x_0} - 1\right)}{x - x_0} =$$

$$= e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \cdot e^{x_0}$$

$x - x_0 = t$

$D(e^x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$D(\sin x) = \cos x$

$D(\cos x) = -\sin x$

Se f è costante $\Rightarrow f'(x) = 0$.

Se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow D(kf) = k\,D(f)$.

Es: $D(3 \sin x) = 3 D(\sin x) = 3 \cos x$

Es: $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = D(\cos x) = -\sin x$

$f'''(x) = D(-\sin x) = -D(\sin x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = D(-\cos x) = -D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x$

$f^{(5)}(x) = D(\sin x) = \cos x = f'(x)$

$f^{(6)} = f''$ . . . .

la derivata è "ciclica di ordine 4"

La stessa cosa vale per $\cos x$.

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{D(\sin x)\cdot \cos x - \sin x\, D(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$D(tg\,x) = 1 + tg^2 x$ oppure $D(tg\,x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Derivata della funzione inversa

$f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ continua e strettamente monotòna (quindi invertibile).

Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0)\neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0=f(x_0)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Ricordando che $x_0 = f^{-1}(y_0)$ la posso scrivere come

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.}$$

Esempio: $f(x) = e^x$

$$y = e^x \Rightarrow x = \log y \Rightarrow f^{-1}(y) = \log y.$$

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

$$(\log y)' = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} \qquad y > 0.$$

$$D(\log y) = \frac{1}{y}.$$

Derivata della funzione composta

$f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $y_0 = f(x_0) \in Acc(B)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in y_0 allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

Es: $D(\sin(x^2))$ $\quad f(x) = x^2 \quad g(y) = \sin y$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

$g'(y) = \cos y$

$f'(x) = 2x$

$$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= \cos(f(x)) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$D(x^{\alpha})$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

$$D(x^{\alpha}) = D\left(e^{\alpha \log x}\right) = e^{\alpha \log x} \cdot D(\alpha \log x) =$$

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \alpha D(\log x) = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^{\alpha} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\boxed{D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha - 1}}$$

Es: $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Es: $D(a^x)$ $\quad a > 0$

$D(a^x) = D(e^{\log(a^x)}) = D(e^{x \log a}) =$

$= e^{x \log a} \cdot D(x \log a) = e^{x \log a} \log a$

$= (\log a) \cdot a^x$.

$\underline{\text{Es}}$: $D(\operatorname{arctg} y)$ formula dell'inversa

$f(x) = \operatorname{tg} x \qquad y = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} y.$

$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \longrightarrow \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$D(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Esempio di una funzione che non ha derivata in un punto

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua in $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$$

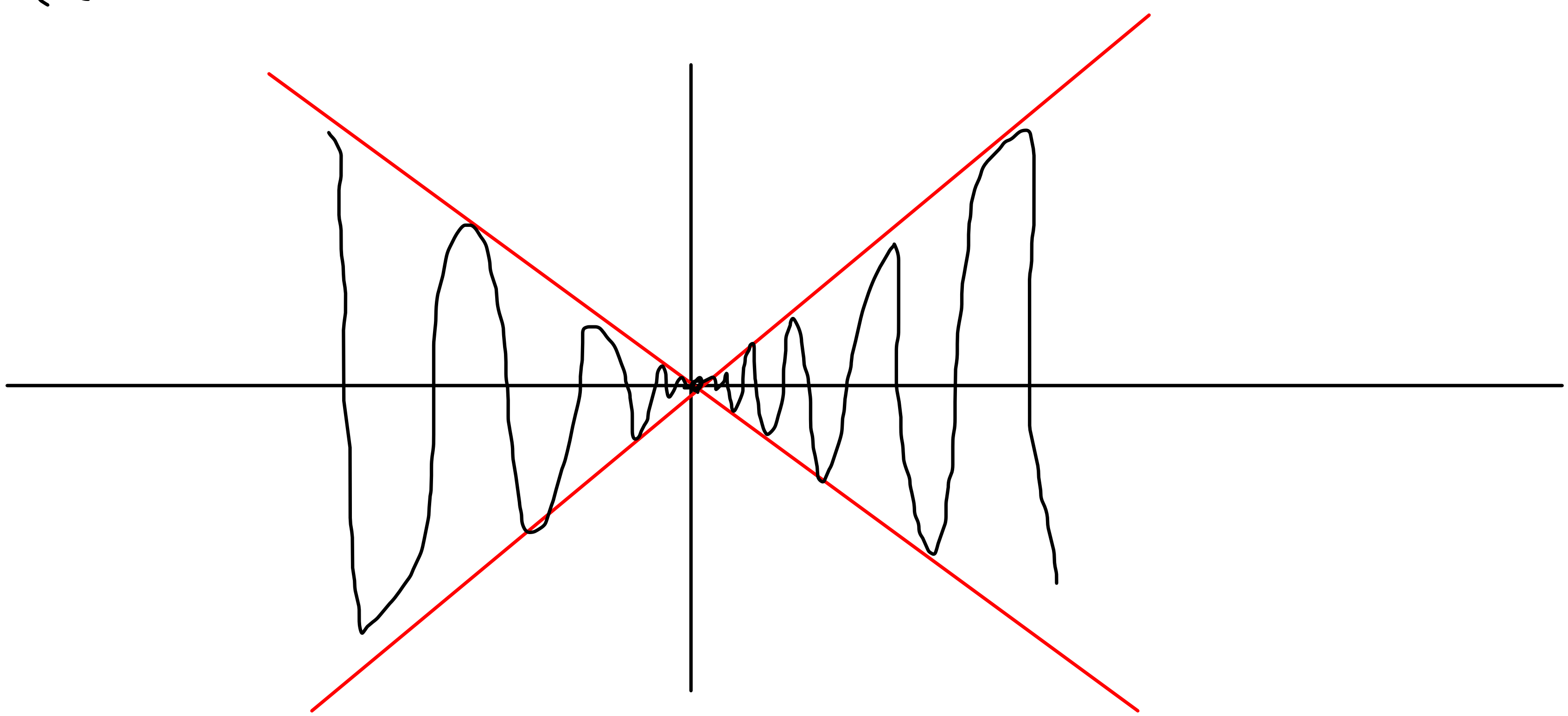
quindi f è continua.

f è derivabile in $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin\frac{1}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x} \quad \underline{\text{non esiste}}.$$

$\Rightarrow$ non esiste la derivata di f in $x = 0$



<u>Esercizio</u>: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\quad x > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$f(0) = (1+0)^{\alpha} = 1$, $\quad f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$

f è derivabile quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

la calcoliamo con $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + o(x) = 1 + \alpha x + o(x)$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

<u>Es</u>: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$.

$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$ per $x \to 0$

Es: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[3]{x^2 + 8x} - \sqrt[3]{x^2} \right) \sqrt[3]{x}$

$(\infty - \infty)\, \infty$??

$$\left((x^2 + 8x)^{1/3} - x^{\frac{2}{3}} \right) x^{1/3} =$$

$$= \left[\left(x^2 \left(1 + \frac{8}{x} \right) \right)^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= \left(x^{2/3} \left(1 + \frac{8}{x} \right)^{1/3} - x^{2/3} \right) x^{1/3} =$$

$$= x^{2/3} \left(\left(1 + \frac{8}{x} \right)^{1/3} - 1 \right) x^{1/3}$$

$$= x\left(\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3}-1\right) = *$$

$$\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\frac{8}{\cancel{x}}+o\left(\frac{8}{x}\right)$$

per $x \to \infty$

$$t = \frac{8}{x}$$

Se $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$$(1+t)^{\alpha} \qquad \alpha = \frac{1}{3}$$

$$* = x\left(\cancel{1}+\frac{1}{3}\frac{8}{x}+o\left(\frac{8}{x}\right)-\cancel{1}\right) =$$

$$= \frac{8}{3}+x\,o\left(\frac{8}{x}\right) = \frac{8}{3}+o(1)$$

cosa vuol dire $o(1)$?

$$\lim_{x\to x_0} \frac{o(1)}{1} = 0 \quad \text{per definizione}$$

se scrivo $o(1)$ vuol dire che è una quantità che tende a 0.

quindi $$\lim \left(\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x} = \frac{8}{3}.$$

Es: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$x_0 = 0$

$\operatorname{arctg} x = 0 + 1 \cdot x + o(x) = \boxed{x + o(x)}$ per $x \to 0$.

<u>Prop</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora $f'(x_0) \geq 0$.
Se f è debolmente decrescente .... $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

<u>dim</u>: $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ma se f è debolmente crescente allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

f mantiene l'ordinamento quindi num. e denomin. sono concordi.

passando al limite si mantiene la disuguaglianza quindi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

$\boxtimes$

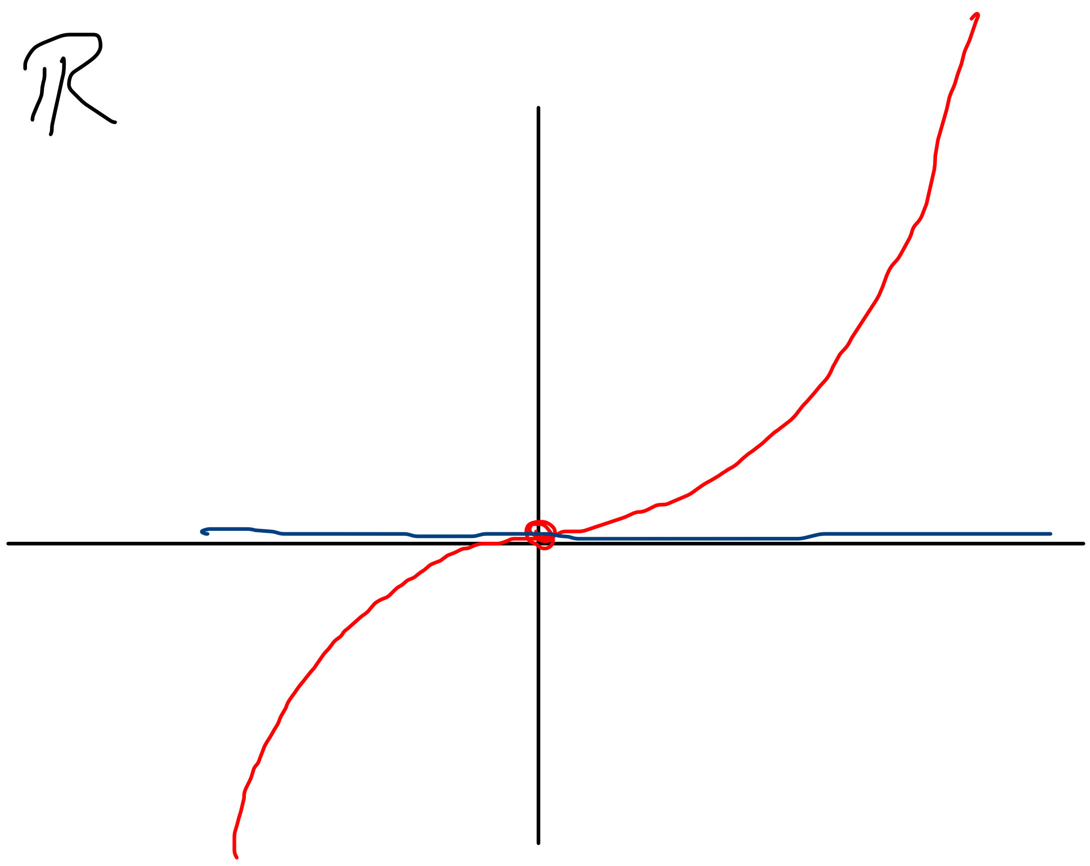
<u>Oss</u>: Se f è strettamente crescente non posso dedurre che $f'(x_0) > 0$. ma solo che $f'(x_0) \geq 0$.

Es: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$ e $f'(0) = 0$

$\downarrow$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



Teorema di Fermat.

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto interno ad A che è di massimo o di minimo locale per f e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

dim: Se f è derivabile in x_0 allora

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f(x) - f(x_0) \geq 0$

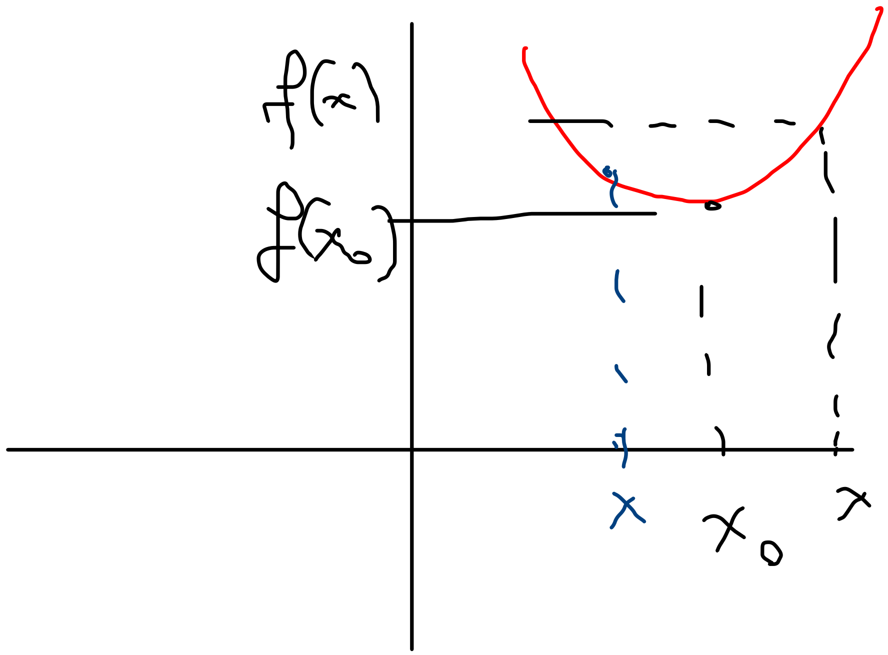
$x - x_0 \geq 0$

supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f

in un intorno di x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0 .$$



$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ ≥ 0, ≤ 0

$$\Rightarrow \quad f'_-(x_0) \leq 0 .$$

Ma $\quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f'_+(x_0) = 0 , \quad f'_-(x_0) = 0$$

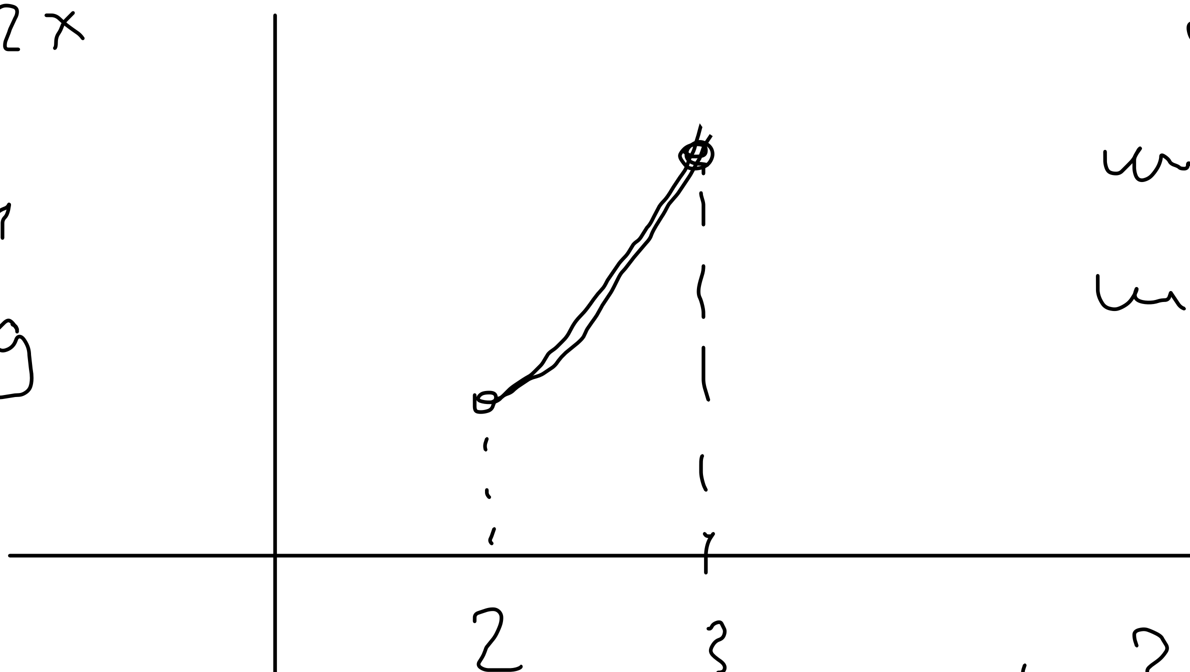
$$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0 .$$

Oss: Se il punto non è interno al dominio $\Rightarrow$ il teorema non è necessariamente valido.

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4$

$f'(3) = 9$



$f(x) = x^2$

$\min f = f(2) = 4$

$\max f = f(3) = 9$

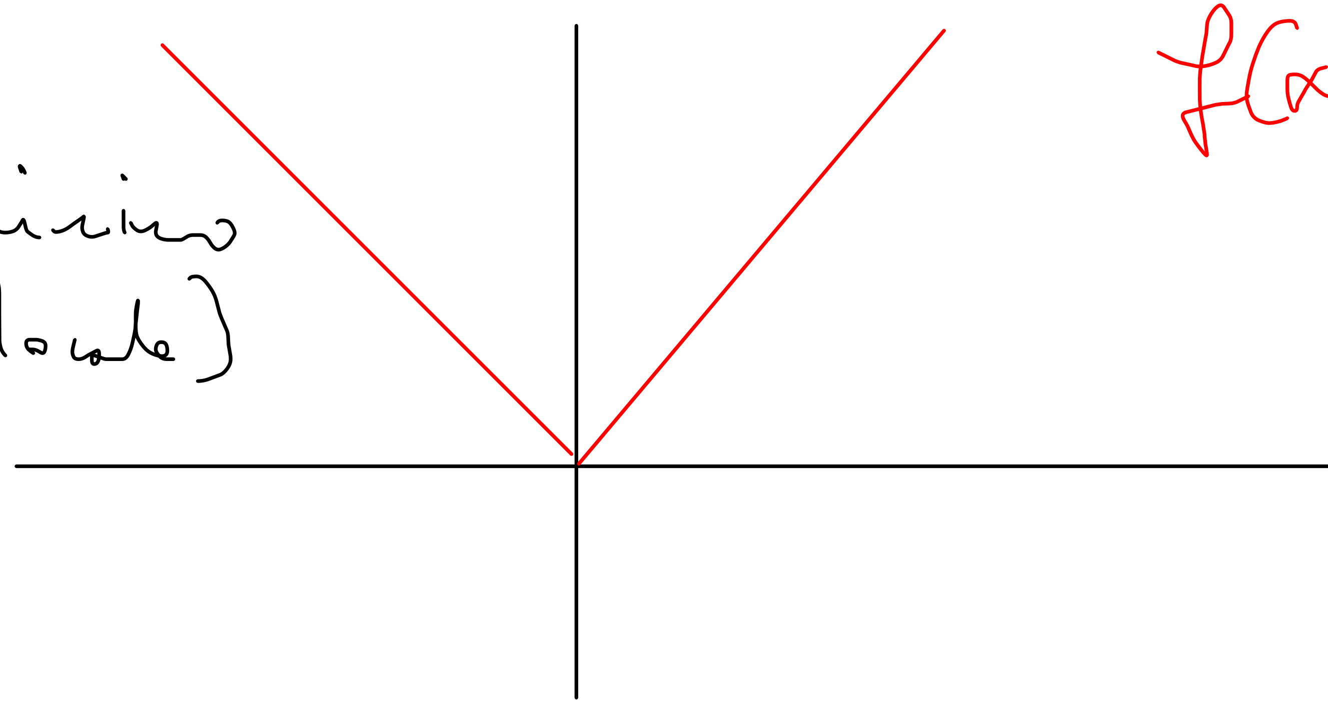
$f : [2,3] \to \mathbb{R}$

2, 3 non sono punti interni.

Oss: L'ipotesi di derivabilità è necessaria.
Quindi possono esserci punti di minimo o di massimo locale dove la derivata non si annulla (perché non esiste).

$x = 0$ è punto di minimo assoluto (e locale)

ma $f'(0) \nexists$.



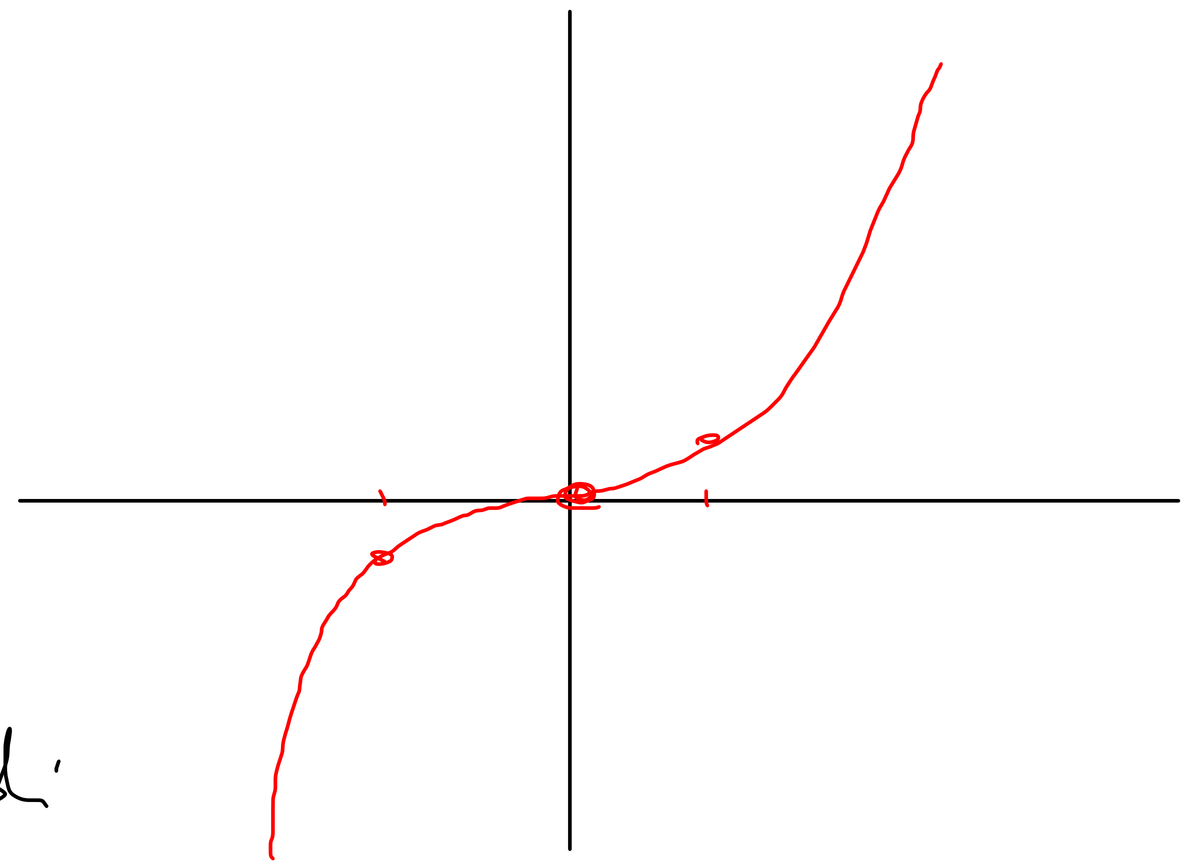
$f(x) = |x|$

Oss: Il teorema è condizione necessaria per un max o min locale ma non suff.

Es: $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$



ma $x = 0$

non è né punto di max né di min locale