UN ESERCIZIO RIFATTO USANDO GLI SVILUPPI E GLI "o piccoli"

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-x} - \log\frac{x^2+2}{x^2+1} + \sin\frac{1}{x}}{2^{-x} + \sqrt{x^2+1} - x} \qquad x \to +\infty$$

NUMERATORE $\to 0$ $\quad e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\log\frac{x^2+2}{x^2+1} \to 0 \qquad \frac{x^2+2}{x^2+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

DENOMINATORE: $\quad 2^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \quad \sqrt{x^2+1} \longrightarrow +\infty,$

$-x \longrightarrow -\infty$?! $\qquad \sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x =$

$$= |x|\sqrt{1+1/x^2} - x \underset{x>0}{=} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x =$$

$$= x\left(\sqrt{1+1/x^2} - 1\right) = x\,\frac{1+\frac{1}{x^2}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

$\infty \cdot 0 \qquad \left(A - B = \frac{A^2-B^2}{A+B}\right)$

Quindi il limite è della forma indeterminata $\frac{0}{0}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-x} - \log\frac{x^2+2}{x^2+1} + \sin\frac{1}{x}}{2^{-x} + \sqrt{x^2+1} - x} =$$

SI METTONO IN RISALTO LE STRUTTURE DEI LIMITI NOTEVOLI

$$= \frac{e^{-x} - \log\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) + \sin\frac{1}{x}}{2^{-x} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}} =$$

SVILUPPI NOTEVOLI

$\log(1+y) = y + o(y) \quad y \to 0$

$\sin z = z + o(z) \quad z \to 0$

$\frac{1}{\sqrt{1+w}+1} = \frac{1}{2} + o(1) \quad w \to 0$

$$= \frac{e^{-x} - \frac{1}{x^2+1} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{2^{-x} + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$e^{-x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{x^2+1} = o\left(\frac{1}{x}\right)$

$2^{-x} = o\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow 2$$