Esercizio 3.39 : verificate le seguenti formule:

c) $\cos(\pi x) = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2; 1)$

$x \to 1$

$$\frac{\cos(\pi x)+1}{(x-1)^2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\pi^2}{2}$$

$$^* \cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad y \to 0$$

noi conosciamo i limiti notevoli o fondamentali per $x \to 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

poiché qui $x \to 1$ la prima domanda è trovare una variabile $y \to 0$ quando $x \to 1$

$$\boxed{y = x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0}$$

Dobbiamo esprimere tutto in termini di $x-1$

FORMULE ADDIZIONE

$$\cos \pi x = \cos \pi(x-1+1) = \cos[\pi(x-1)+\pi] = \cos(\pi(x-1))\cdot\cos\pi - \cancel{\sin\pi(x-1)\sin\pi}$$

$$= -\cos(\pi(x-1)) \overset{*}{=} -\left[1 - \frac{\pi^2(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)\right]$$

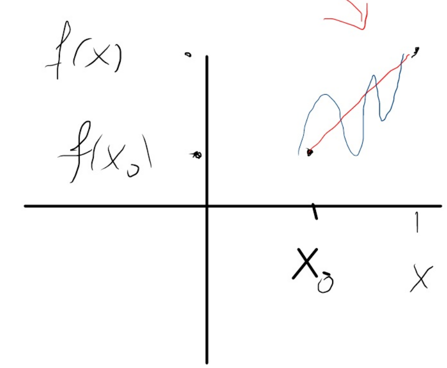
Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Acc}(A)$. $x_0 \in A$

Se esiste il limite

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

pendenza della corda

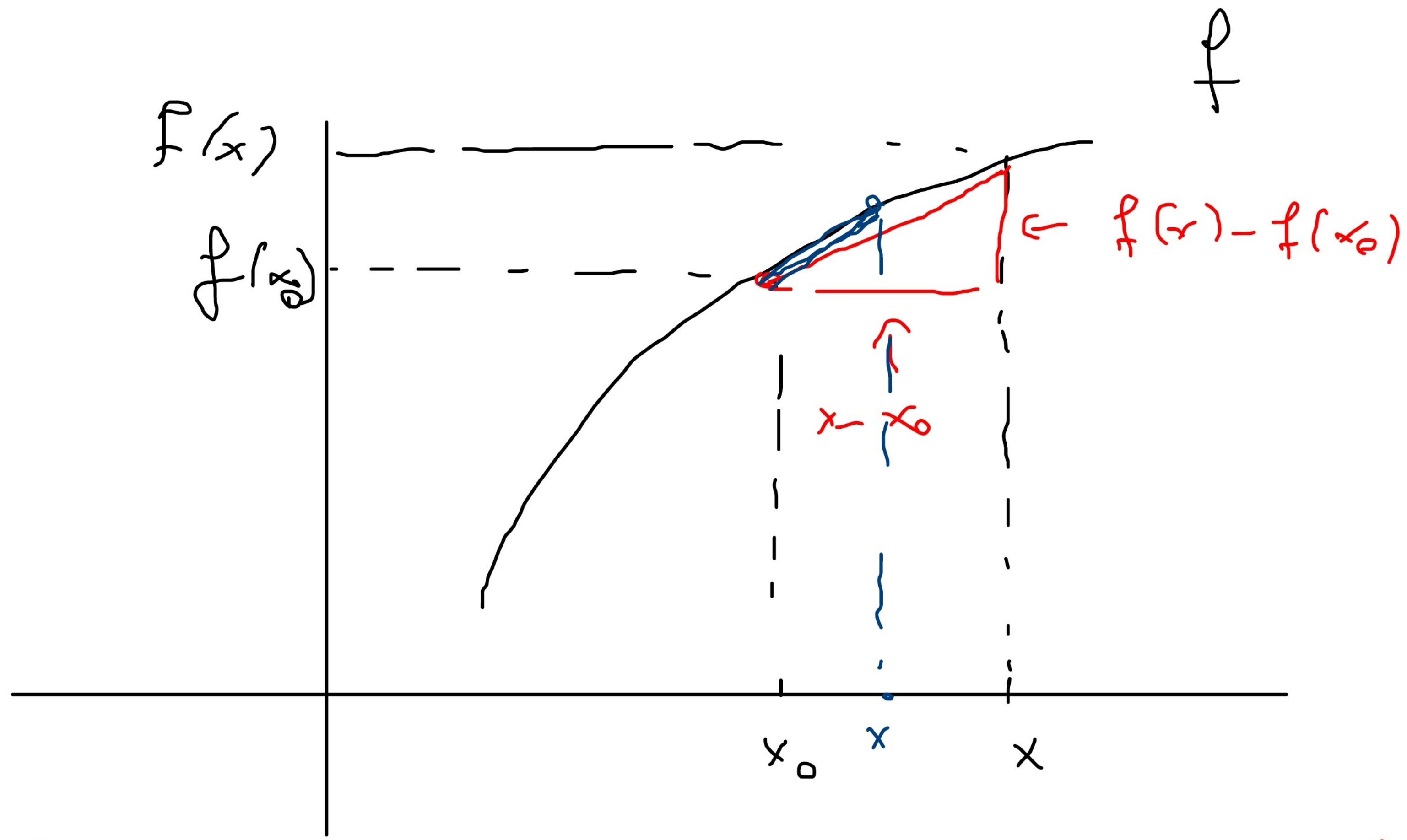


allora l si dice derivata di f in x_0 $\in \mathbb{R}$ o $= +\infty, -\infty$

Se $l \in \mathbb{R}$ (è finito) allora f si dice derivabile in x_0

La derivata si indica con $f'(x_0)$ oppure $Df(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

quindi $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

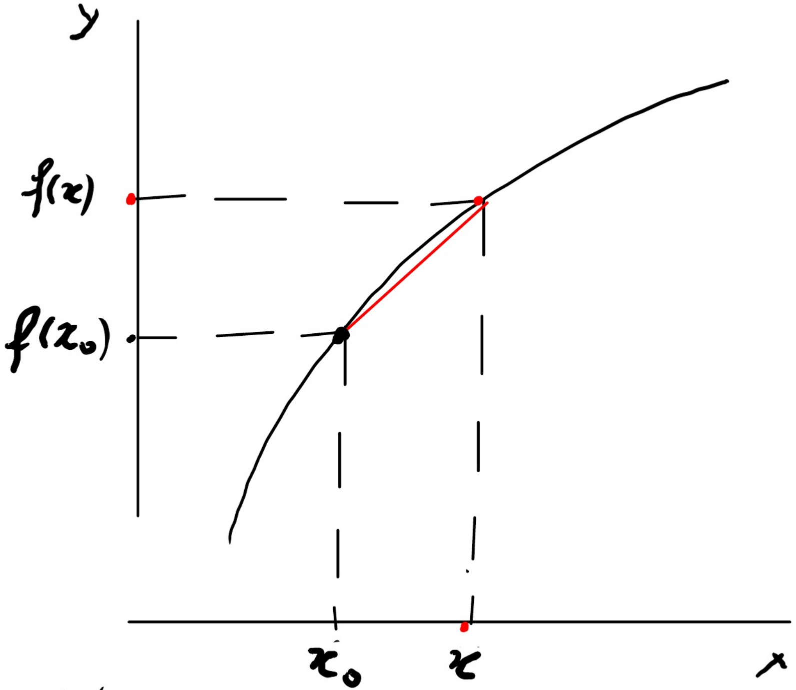


$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rapporto incrementale

della corda che congiunge
i punti del grafico di f
di coordinate $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$

SCOPPIAMENTO



$\tilde{x} = x - x_0$

$\tilde{y} = y - f(x_0)$

coordinate centrate in $(x_0, f(x_0))$

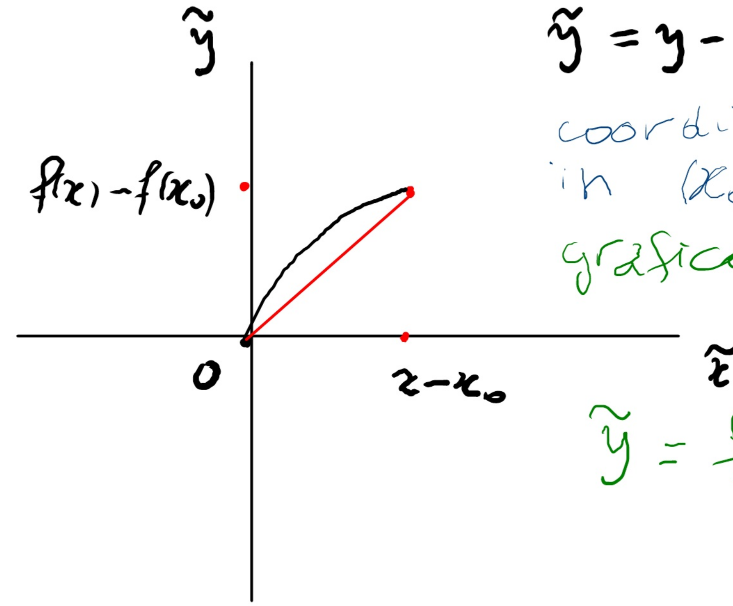
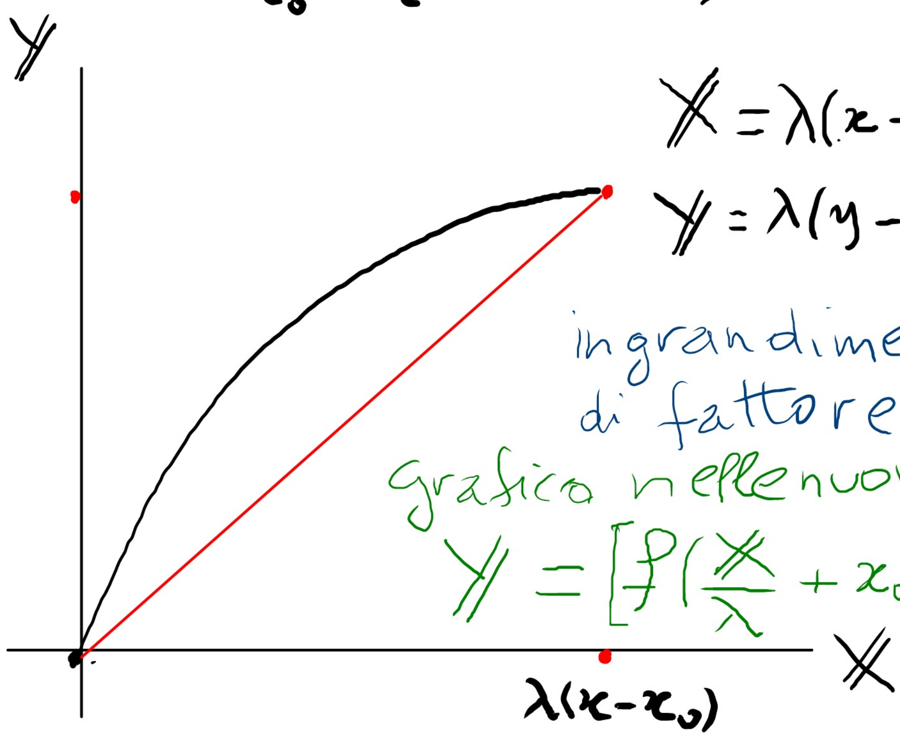


grafico nelle nuove coordinate

$\tilde{y} = f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0)$



$X = \lambda(x - x_0) = \lambda \tilde{x}$

$Y = \lambda(y - f(x_0)) = \lambda \tilde{y}$

ingrandimento di fattore $\lambda \gg 1$

grafico nelle nuove coord.

$$Y = \left[f\left(\frac{X}{\lambda} + x_0\right) - f(x_0)\right]\lambda$$

SCOPPIAMENTO $\lambda \to +\infty$

$$Y = \frac{\left[f\left(\frac{X}{\lambda} + x_0\right) - f(x_0)\right]}{\frac{1}{\lambda}}$$

$$Y = \frac{\left[f\left(\frac{X}{\lambda} + x_0\right) - f(x_0)\right]}{\frac{X}{\lambda}} X$$

grafico limite:

$$Y = f'(x_0) X$$

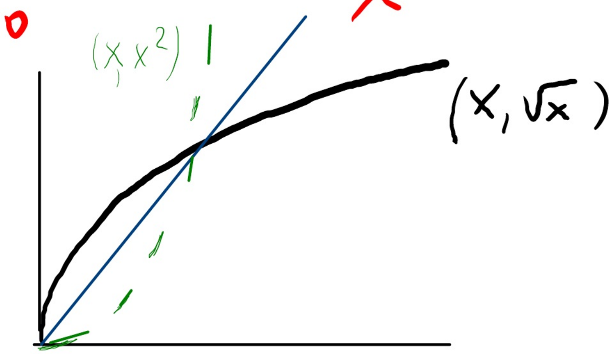
Oss: l'esistenza della derivata e la derivabilità sono due cose diverse perché la derivata potrebbe valere anche $\pm\infty$. In tal caso f non è derivabile ma esiste la derivata.

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

calcoliamo la derivata in $x_0 = 0$.

$x_0 = 0$
$x \geq 0,\ x > 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$



$\text{dom} f = [0; +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} =$$

x_0 x_0 x_0

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

$f'(0) = +\infty$ e f non è derivabile in $x_0 = 0$.

avendo derivata $+\infty$.

Teorema: Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.

derivabilità in $x_0 \Longrightarrow$ continuità in x_0

Dim: $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right) =$

$= f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) =$

$= f(x_0) + \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right) =$

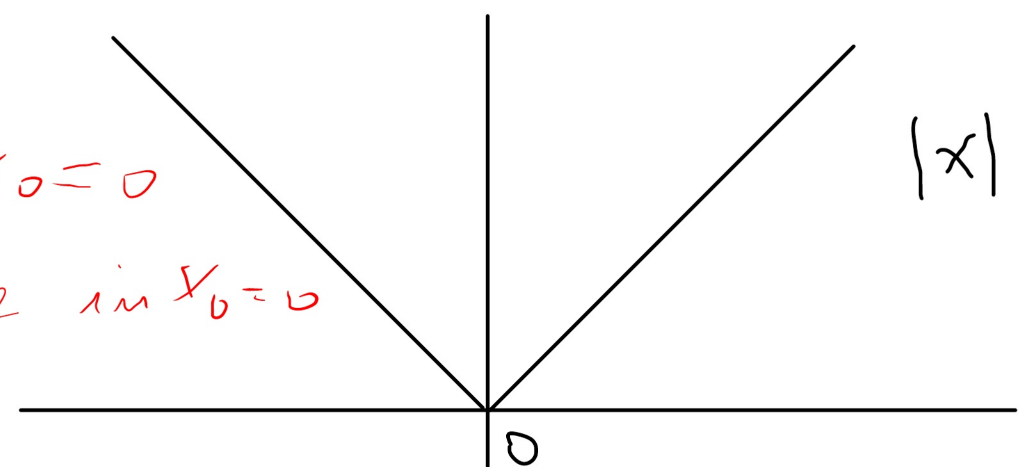
$= f(x_0) + f'(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} (x-x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \overbrace{0}^{0} =$

$= f(x_0) + 0 = \boxed{f(x_0)}$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ quindi f è continua in x_0 $\boxtimes$

Il viceversa è vero? f continua $\Rightarrow$ f derivabile?
f ha derivata

Es: $f(x) = |x|$

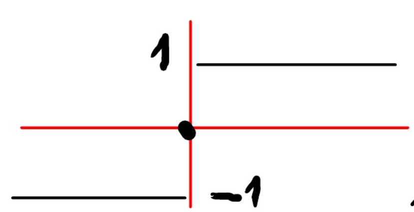


f è continua in $x_0 = 0$

ma non ha derivata in $x_0 = 0$

OSS. Se f ha derivata in x_0 $\cancel{\Rightarrow}$ f sia cont. in x_0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$\lim_{0^+} f = 1 \qquad \lim_{0^-} f = -$

$$\lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{0} \frac{\frac{x}{|x|}}{x} = \lim_{0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

ma $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}\right\}$$

sono diversi quindi non esiste il limite.

Quindi non solo non è derivabile ma anche NON HA DERIVATA quindi non esiste la derivata di $|x|$ in $x_0=0$.

$\Rightarrow$ in generale f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile.

Def: Se esiste $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

questo si chiama derivata destra di f in x_0

Invece $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si dice derivata sinistra. Si indicano con $f'_{\substack{+\\d}}(x_0)$ e $f'_{\substack{-\\s}}(x_0)$.

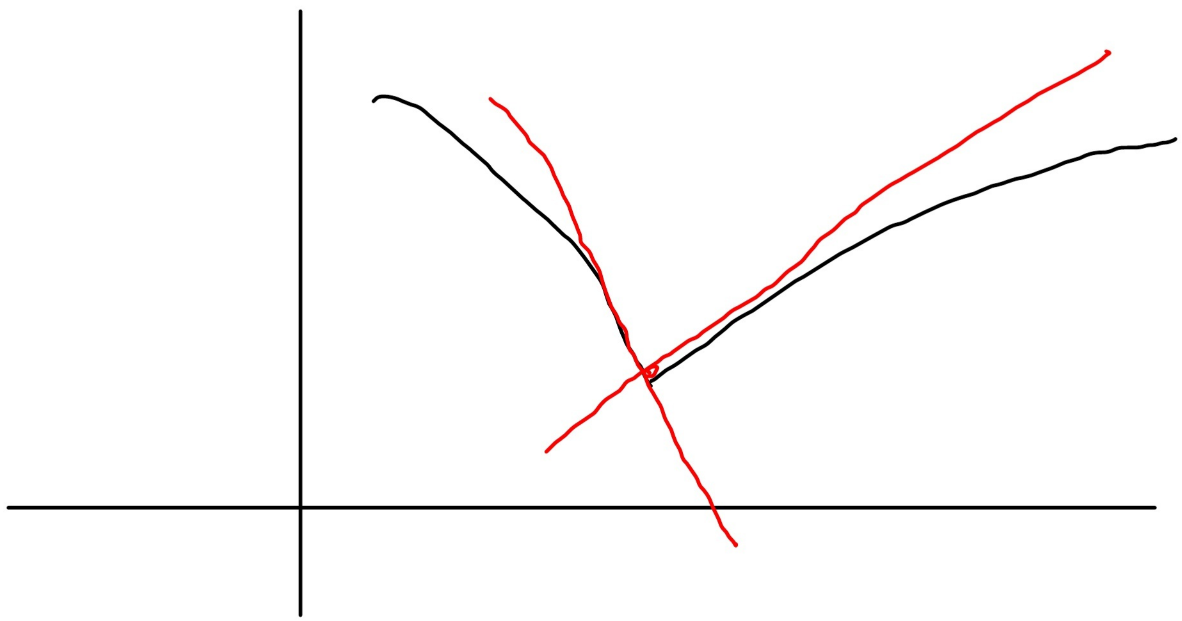
Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite.

Es: $f(x) = |x|$

$f'_+(0) = 1 \qquad f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$

quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

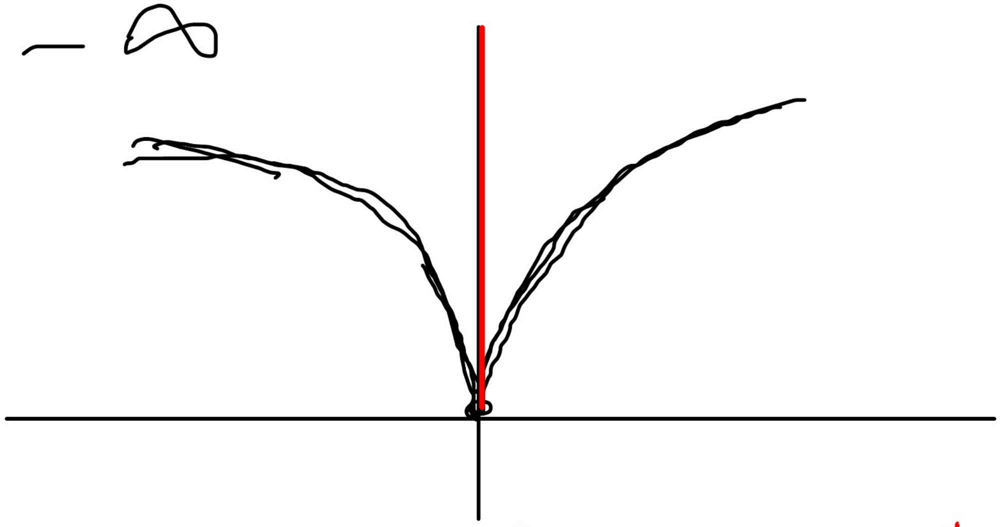
Def: Se esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ entrambe finite ma diverse tra loro allora x_0 si dice punto angoloso.



Def: Se $f'_+(x_0) = \pm\infty$ e $f'_-(x_0) = \mp\infty$ (o viceversa) il punto x_0 si dice punto di cuspide.

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'_+(0) = +\infty \quad , \quad f'_-(0) = -\infty$



non c'è in effetti una retta tangente ma una "semiretta tangente"

Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}$$ APPROSSIMAZIONE "LINEARE"

per $x \to x_0$.

A parole: per $x \to x_0$ f è approssimabile con un polinomio di primo grado ed errore relativo rispetto ad $x - x_0$, infinitesimo per $x \to x_0$

Infatti

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$y = mx + q$

p.p. di $f(x) - f(x_0)$ rispetto a $x - x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

$f(x) - f(x_0) =$

$= (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$

Viceversa se $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m + \frac{o(x - x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} m$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = \boxed{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)} + o(x-x_0)$$

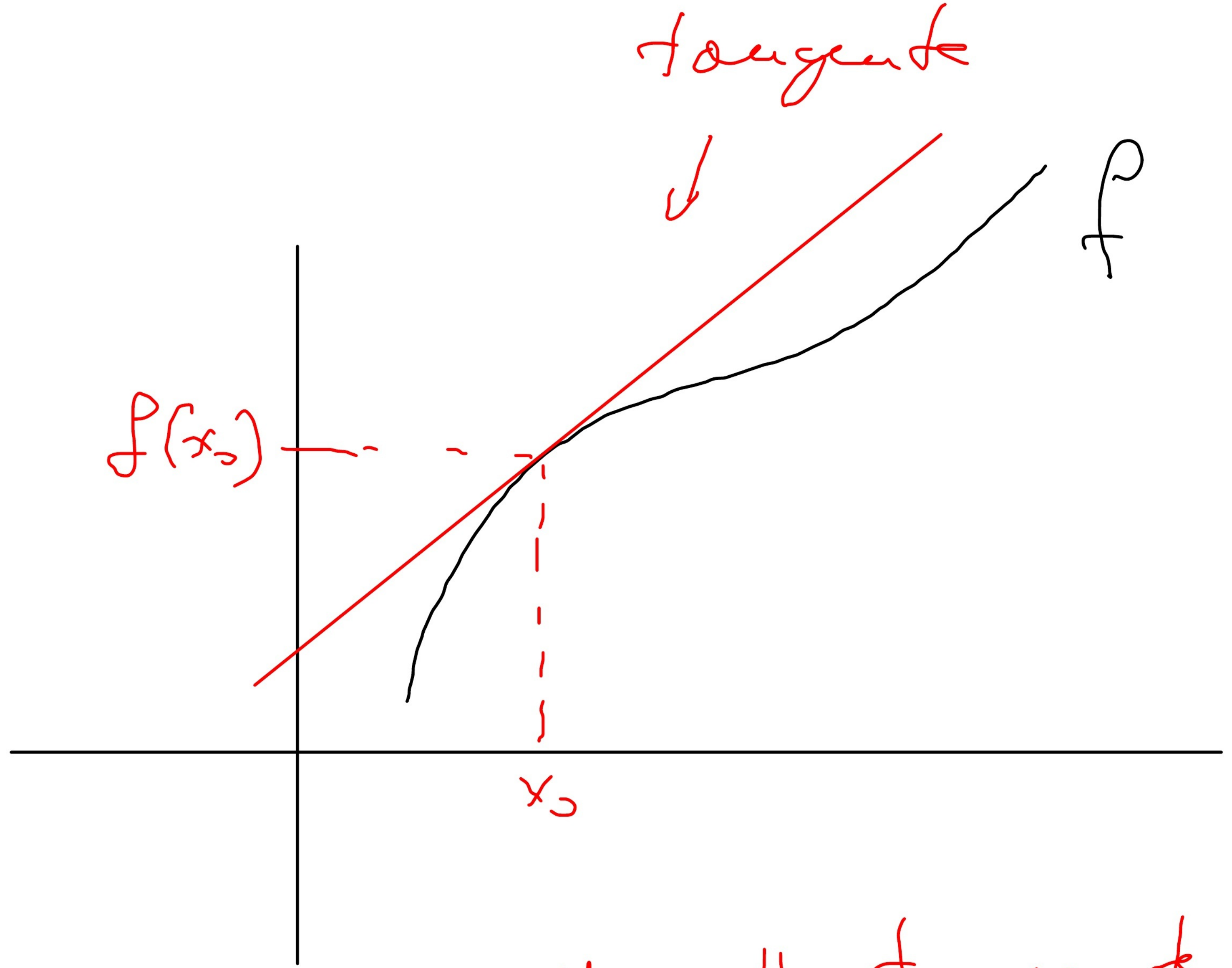
$\boxed{\text{Def}}$: Se f è derivabile in x_0 allora la retta

grafico del polinomio di primo grado:

$y = f'(x_0)x + \underline{f(x_0) - f'(x_0)x_0}$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

si dice $\boxed{\text{retta tangente}}$ al grafico di f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.



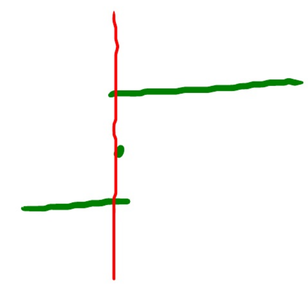
il coeff. angolare della retta tangente è $f'(x_0)$.

Oss. Se f in x_0 fosse continua e avesse derivata ma non fosse derivabile

$$\left(\exists f'(x_0) = +\infty \quad \text{o} \quad \exists f'(x_0) = -\infty \right)$$

si definisce comunque la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, la retta di equazione $x = x_0$ (che non è un grafico rispetto all'asse delle ascisse).

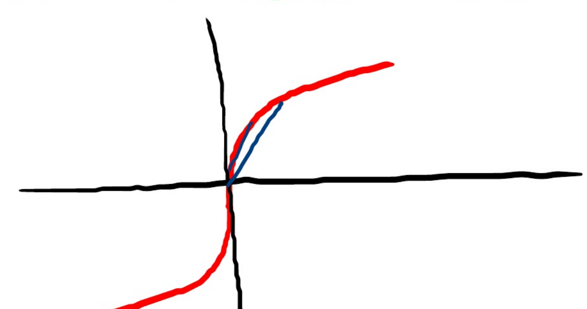
$$f_1(x) = \sqrt[3]{x} \qquad\qquad f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



è continua in $x_0 = 0$ — non è continua in $x_0 = 0$

ma hanno entrambe derivate $= +\infty$ in $x_0 = 0$

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{|x|^{2/3}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$



DEFINIZIONE

$f: A \to \mathbb{R}$ supponiamo che f sia

derivabile in ogni punto $x \in A$.

Allora $\exists\, f'(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in A$ e costruisco la

funzione derivata di f

$$f': A \to \mathbb{R}.$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

Se la funzione f' è a sua volta derivabile posso calcolarne la derivata che chiamo derivata seconda di f e indico con f''.

Quindi $f'' = (f')'$ $\qquad \dfrac{d^2 f}{dx^2} \qquad D^2 f$

Posso in questo modo definire le derivate successive di f.

Osservazione: quindi per parlare di $f''(x_0)$ in $x_0 \in \operatorname{dom} f$, non solo deve esistere $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, ma deve esistere $f'(x) \in \mathbb{R}$, per ogni $x \in \mathcal{U} \cap \operatorname{dom} f$, $\mathcal{U}$ intorno di x_0

$$f''' = (f'')'$$

$$f^{(4)} = (f''')'$$

$$\dots$$

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Per convenzione si indica con $f^{(0)}$ la funzione stessa

$$f^{(0)} = f.$$

OSS.: analogamente per parlare di $f^{(n)}(x_0)$ deve esistere $f^{(n-1)}(x) \in \mathbb{R}$ per ogni x in un intorno di x_0

Def: Dato $n \in \mathbb{N}$ si dice che f è di classe C^n se f è derivabile n-volte e $f^{(n)}$ è continua.

ci sono le funzioni $f, f', \dots, f^{(n-1)}, f^{n}: A \to \mathbb{R}$ e sono tutte funzioni continue in A.

Teorema: Se f e g sono funzioni
*derivabili in x_0 allora

1) $\lambda f + \mu g$ è derivabile in x_0 e $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$

LINEARITÀ DELLA DERIVATA

2) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

$$\frac{f(x)g(x) - g(x_0)f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - g(x_0)f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$

$\ast \to g(x_0)$

$\to f(x_0)\, g'(x_0)$

3) se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è derivabile in x_0

e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2} \quad *$$

Oss: Se f, g sono derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$

allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

$f \cdot \frac{1}{g}$

esercizio

---

essendo f derivabile in x_0 è continua in x_0: quindi in un intorno

$*$ di x_0 $\frac{1}{f(x)}$ è definita: $\left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right]\frac{1}{x-x_0} = \frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\,\frac{1}{f(x)f(x_0)} \xrightarrow{x \to x_0} -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$

Derivate delle funzioni elementari

$f(x) = c \quad \forall x \qquad f'(x) = 0$

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

$g(x) = x^2 \qquad g'(x) = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' =$

$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x \quad \to g'(x) = 2x$

$h(x) = x^3 \qquad h'(x) = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot (x)' =$

$= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(x^7)' = 7 \cdot x^6$$

DIM. $\dfrac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \dfrac{(\cancel{x - x_0})(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \ldots + x^{n-k-1} x_0^k + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\cancel{x - x_0}}$

$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \ldots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}}_{n \text{ addendi che convergono ad } x_0^{n-1} \text{ per } x \to x_0} \longrightarrow n x_0^{n-1}$

Derivata di e^x in $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{e^y - 1}{y} \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0}(e^{x - x_0} - 1)}{x - x_0} =$$

$$= e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{\boxed{t \to 0}} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \cdot e^{x_0}$$

$$\boxed{x - x_0 = t}$$

ES

$$(3x^7 - 5x^2 - x + 3)' \overset{(1)}{=} (3x^7)' + (-5x^2)' + (-x)' + (3)' \overset{(1)}{=} 3(x^7)' - 5(x^2)' - (x)' + (3)' \overset{x^n}{=} 21x^6 - 10x - 1$$

$$D(e^x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

* $D(\sin x) = \cos x$

$D(\cos x) = -\sin x$

Se f è costante $\rightarrow f'(x) = 0$.

Se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow D(kf) = k\,D(f)$.

Es: $D(3\sin x) = 3D(\sin x) = 3\cos x$

*DIM: $$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{\sin((x-x_0)+x_0) - \sin x_0}{x-x_0} = \underbrace{\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}}_{\xrightarrow{x-x_0\to 0} 1}\cos x_0 + \sin x_0 \underbrace{\frac{[\cos(x-x_0)-1]}{(x-x_0)^2}(x-x_0)}_{\xrightarrow{x-x_0\to 0} 0}$$

Es: $f(x) = \sin x$

$$D^4(\sin x) = \sin x$$

$$D^4(\cos x) = \cos x$$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = D(\cos x) = -\sin x$

$f'''(x) = D(-\sin x) = -D(\sin x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = D(-\cos x) = -D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x$

$f^{(5)}(x) = D(\sin x) = \cos x = f'(x)$

$f^{(6)} = f''$ . . .

ESEMPIO

$\sin(3x)$ ... $D^n = 3^n (\pm \sin / \pm \cos)$

$D = 3\cos(3x)$

$D^2 = -9\sin(3x)$

la derivata è "ciclica di ordine 4"

NOTAZIONE: $D^0 f \equiv_{\text{def}} f \qquad f^{(0)} = f$

La stessa cosa vale per $\cos x$.

$$\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{D(\sin x)\cdot\cos x - \sin x\, D(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D(\operatorname{tg} x) = 1 + (\operatorname{tg} x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$D(tg\,x) = 1 + tg^2 x$ oppure $D(tg\,x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\boxed{1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Derivata della funzione inversa

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e strettamente monotòna (quindi invertibile).

Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

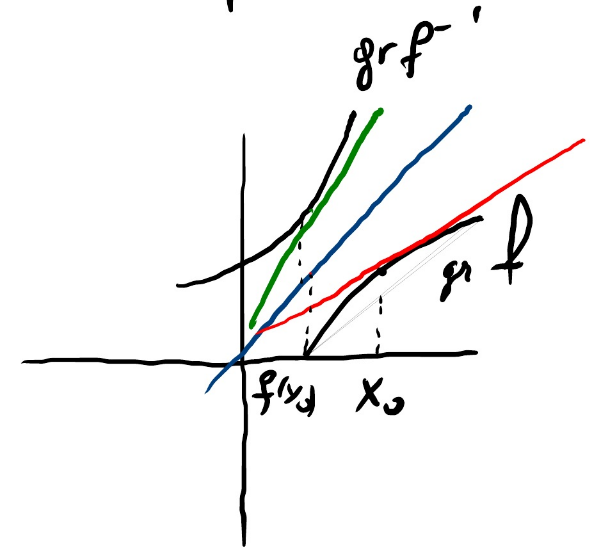
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ricordando che $x_0 = f^{-1}(y_0)$ la posso scrivere come

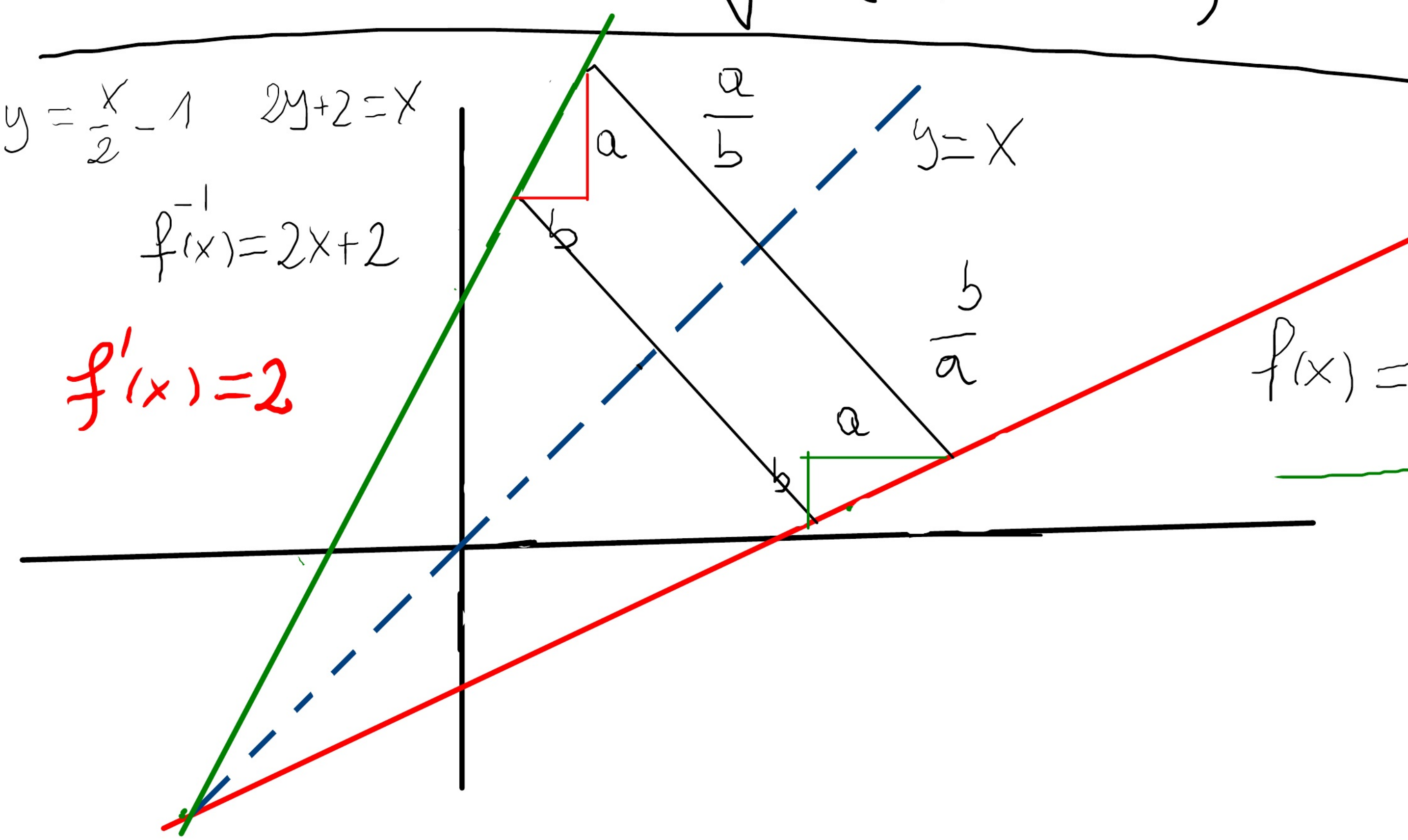
$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}.$$



$y = \frac{x}{2} - 1 \qquad 2y + 2 = x$

$f^{-1}(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 2$



$f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$f'(x) = \frac{1}{2}$

Esempio: $f(x) = e^x$ $\qquad f'(x) = e^x$

$$y = e^x \Rightarrow x = \log y \Rightarrow f^{-1}(y) = \log y \; *$$

$$\boxed{f'(x) = e^x}$$

$$(\log y)' = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} \overset{*}{=}$$

$$= \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} \qquad y > 0.$$

$$\boxed{D(\log y) = \frac{1}{y}}.$$

Derivata della funzione composta

$f : \underset{x}{A} \to \underset{y}{B}$, $g : B \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $y_0 = f(x_0) \in Acc(B)$. Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $\overset{f(x_0)}{y_0}$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

REGOLA DELLA CATENA

$$\frac{d\, g\circ f}{dx}(x_0) = \frac{dg}{dy}(f(x_0))\,\frac{df}{dx}(x_0)$$

DIM

Per $x \neq x_0$ $\quad \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \overset{?}{=} \dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

PUÒ ESSERE NULLO PER $x \neq x_0$!

$f = y$

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & y = f(x_0) \end{cases}$$

se $f(x) = f(x_0)$ viene $\boxed{0 = 0}$ $\longrightarrow$ $\parallel$

$$F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{\text{LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA}} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$\begin{cases} F \text{ è continua in } f(x_0) \\ f \text{ " " } x_0 \end{cases}$

$\underline{Es}$: $D(\sin(x^2))$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad g(y) = \sin y$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

$g'(y) = \cos y$

$f'(x) = 2x$

$$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= \cos(f(x)) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$(\sin(3x))'$ $\quad g = \sin y$

$\shortparallel$ $\quad f = 3x$

$\underset{3}{(f)'}\,\underset{\cos}{(\sin)'}(f) = 3\cos(3x)$

$f^{-1} \circ f\,(x) = x$ $\quad ((f^{-1} \circ f))'(x) = 1$

$(x)' = 1$

$\shortparallel$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g(y) = e^y$$
$$f(x) = \alpha \lg x$$
$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x)$$

$$D(x^\alpha) \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$$

$$D(x^\alpha) = D\left(e^{\alpha \log x}\right) = e^{\alpha \log x} \cdot D(\alpha \log x) =$$

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \alpha D(\log x) = e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

$$\boxed{D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1}} \qquad x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Es: $D(\sqrt{x}) = D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{1/2}} =$

$\alpha x^{\alpha-1} = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Es: $D(a^x)$ $\quad a > 0$

$\boxed{D(a^x)} = D(e^{\log(a^x)}) = D(e^{x\log a}) =$

$= e^{x\log a} \cdot D(x\log a) = e^{x\log a} \log a$

$= \boxed{(\log a) \cdot a^x}.$

Es: $D(\operatorname{arctg} y)$ formula dell'inversa

$f(x) = \operatorname{tg} x \quad (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad y = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} y.$

$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

$x = f^{-1}(y)$

$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$(f^{-1}(\cancel{y}))'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(f^{-1}(y))} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{d \operatorname{arctg}}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$D(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Esempio di una funzione che non ha derivata in un punto

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\sin \frac{1}{x} = 0$

$x = \frac{1}{n\pi}$

f è continua in $x=0$?

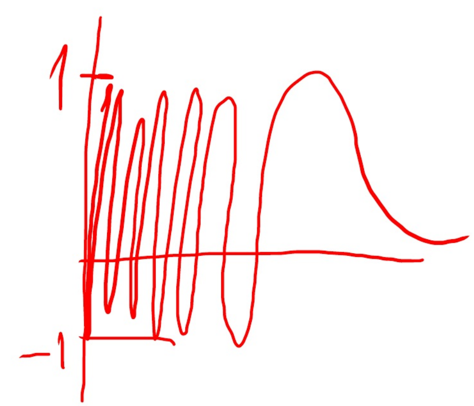
$\sin \frac{1}{x} = 1, -1$

$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$$

quindi f è continua.

f è derivabile in $x=0$?



$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x} - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \quad \text{non esiste}$$

$0 = \sin n\pi = \sin \frac{1}{\frac{1}{n\pi}}$

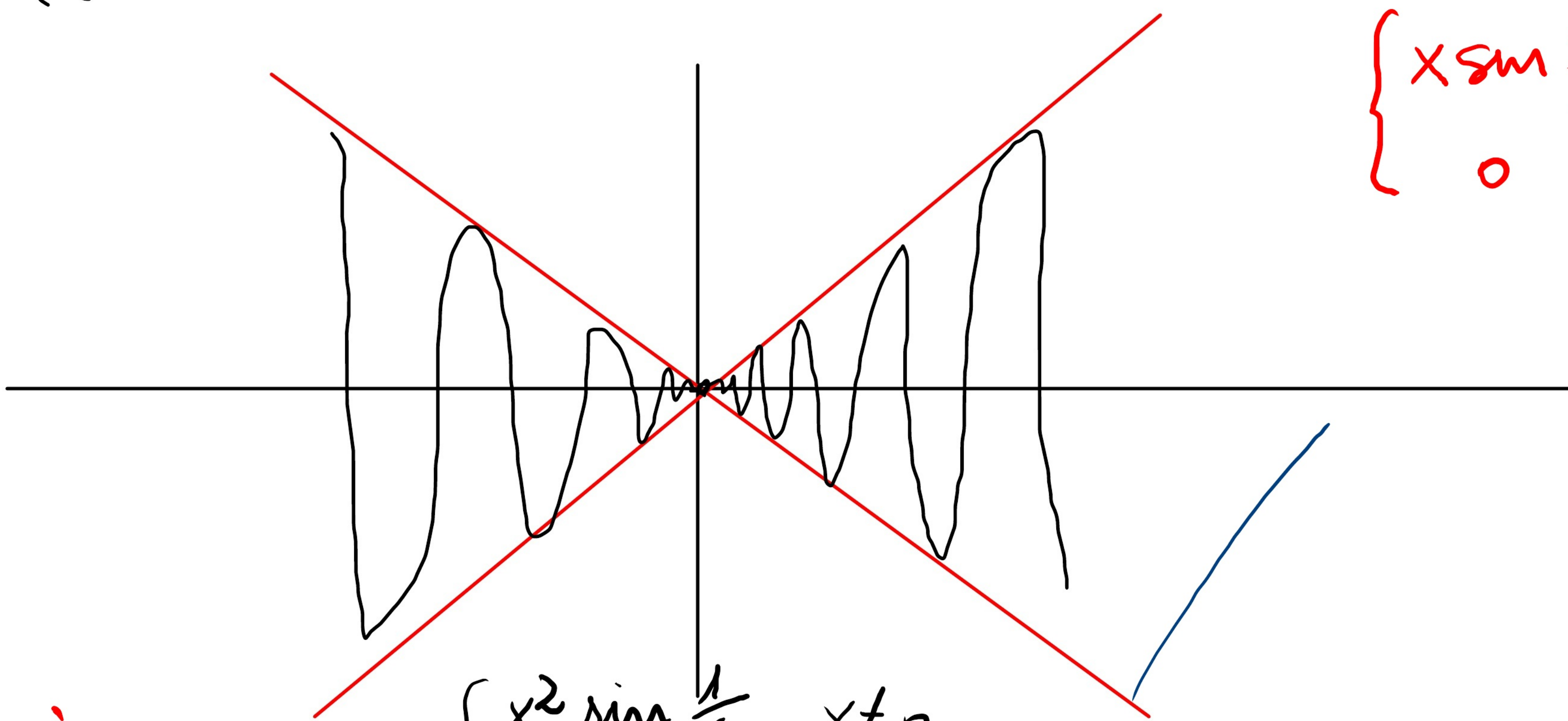
$x = \frac{1}{n\pi} \to 0$

$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \sin \frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}$

$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \to 0$

$\Rightarrow$ non esiste la derivata di f in $x_0 = 0$

$$\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$



Esercizio

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \quad \text{è derivabile in } x_0 = 0?$$

NOTA

per $x \neq 0$ $\exists f'(x)$ per il teorema di composizione

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right)' \quad \text{derivata prodotti}$$

composiz. $= 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

potenze $= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ non ha limite

• $x_0 = 0$ RAPPORTO INC.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \overset{x \neq 0}{=} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = x \sin\frac{1}{x} \longrightarrow 0 \qquad \exists f'(0) = 0$$

MA $f'(x) \underset{x \to 0}{\not\to}$ NON CONV

Esercizio: $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\quad x > -1, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f(0) = (1+0)^{\alpha} = 1, \quad f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$$

f è derivabile quindi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

la calcoliamo con $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x) = 1 + \alpha x + o(x)$$

A MEMORIA

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

SVILUPPO BINOMIALE LINEARE

Es: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ per $x \to 0$.

$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{3}$

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$ per $x \to 0$

Es: $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt[3]{x}$

$(\infty - \infty)\,\infty$??

esercizio a casa

$$\left(\left(x^2+8x\right)^{1/3} - x^{\frac{2}{3}}\right) x^{1/3} =$$

$$= \left[\left(x^2\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)^{1/3} - x^{2/3}\right] x^{1/3} =$$

$$= \left(x^{2/3}\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} - x^{2/3}\right) x^{1/3} =$$

$$= x^{2/3}\left(\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} - 1\right) x^{1/3}$$

$$= x\left(\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3}-1\right) = (*)$$

$$\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\frac{8}{\cancel{x}}+o\left(\frac{8}{x}\right)$$

per $x \to \infty$

$t = \frac{8}{x}$

Se $x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$

$(1+t)^{\alpha} \qquad \alpha = \frac{1}{3}$

$$(*) = x\left(\cancel{1}+\frac{1}{3}\frac{8}{x}+o\left(\frac{8}{x}\right)-\cancel{1}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + x\, o\left(\frac{8}{x}\right) = \frac{8}{3} + o(1)$$

cosa vuol dire $o(1)$?

continua la prossima lez.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(1)}{1} = 0$$ per definizione

se scrivo $o(1)$ vuol dire che è una quantità che tende a 0.

quindi $$\lim \left(\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2} \right) \sqrt[3]{x} = \frac{8}{3}.$$

Es: $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$x_0 = 0$

$\operatorname{arctg} x = 0 + 1 \cdot x + o(x) = \boxed{x + o(x)}$ per $x \to 0$.

Prop: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora $f'(x_0) \geq 0$.

Se f è debolmente decrescente ..... $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$.

dim: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ma se f è debolmente crescente allora

$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ f mantiene l'ordinamento quindi num. e denomin. sono concordi.

passando al limite si mantiene la disuguaglianza quindi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

$\boxtimes$

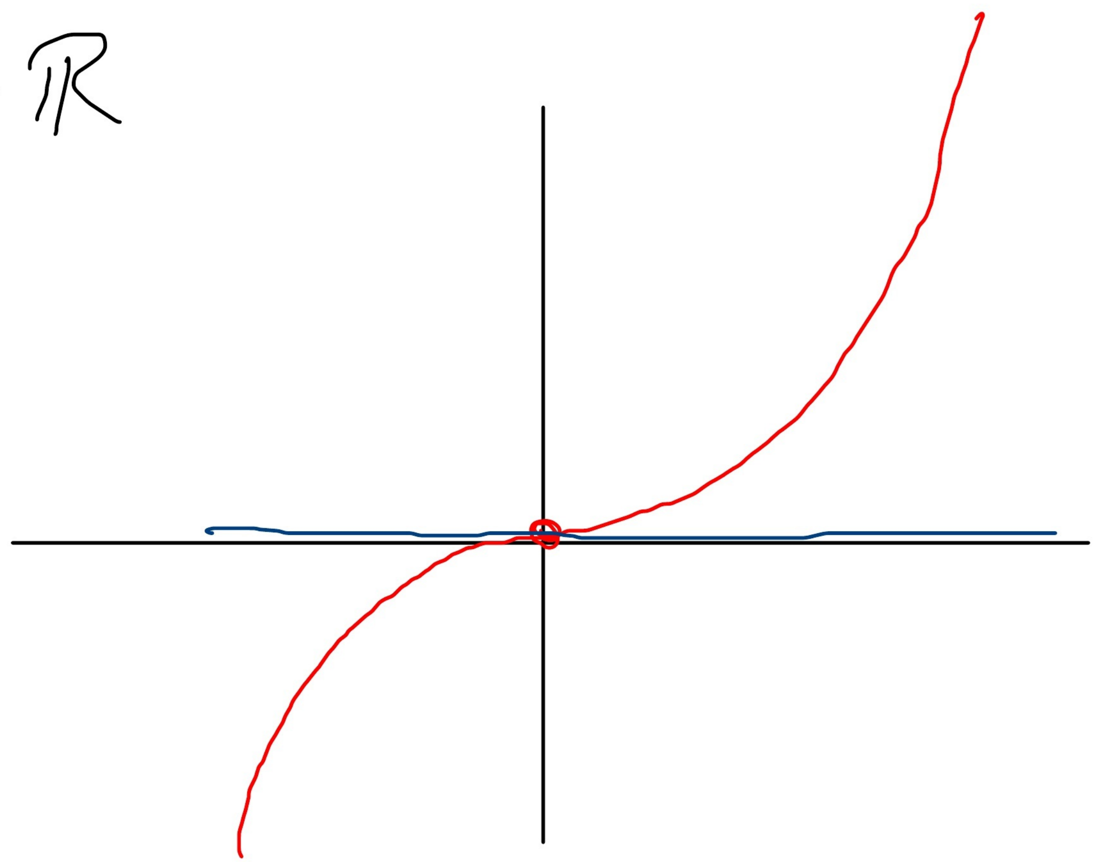
Oss: Se f è strettamente crescente non posso dedurre che $f'(x_0) > 0$.
ma solo che $f'(x_0) \geq 0$.

Es: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2$ e $\underline{\underline{f'(0) = 0}}$

$\downarrow$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

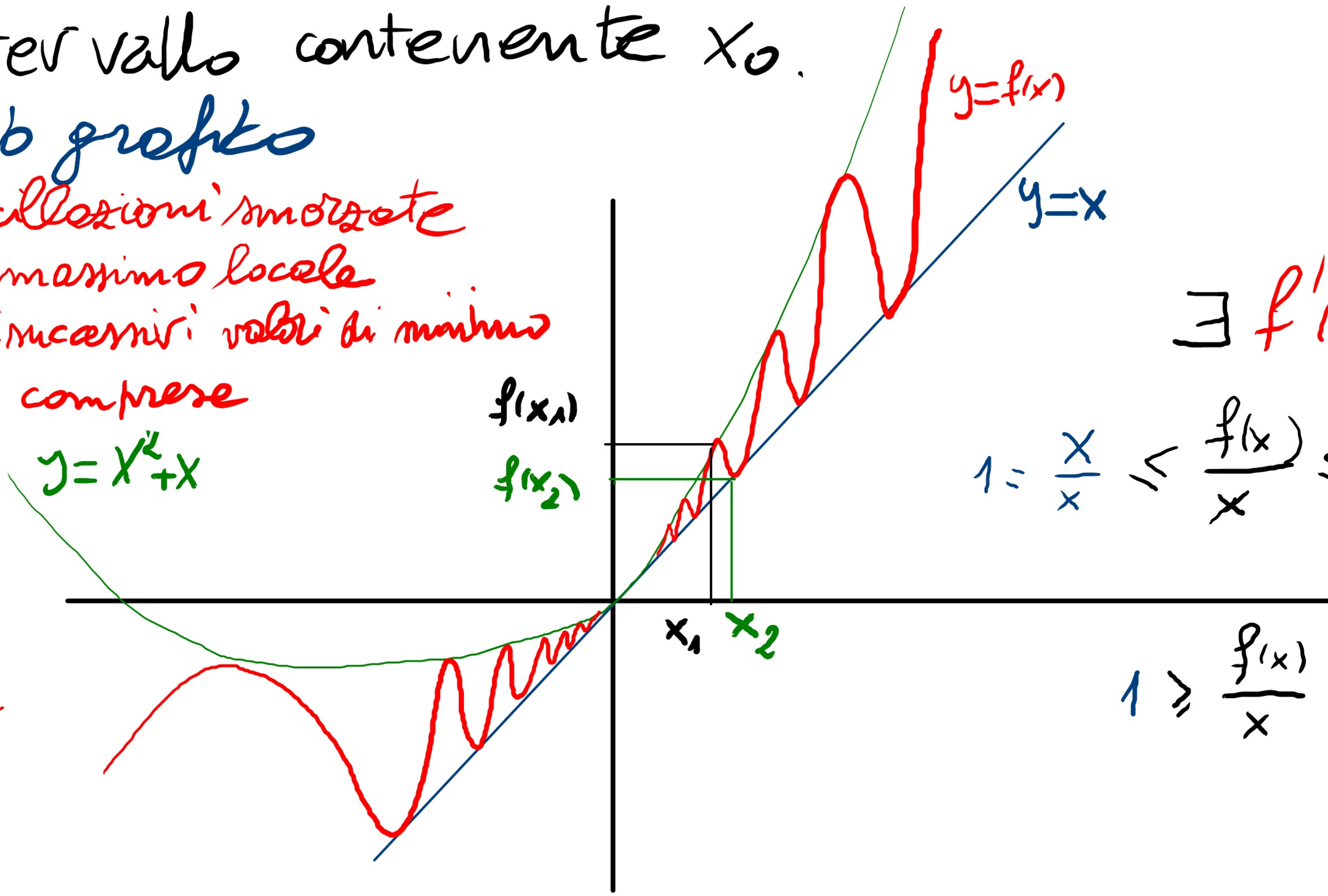


Osservazione:

Vi sono funzioni derivabili in ogni punto di $\mathbb{R}$ per cui anche se $f'(x_0) > 0$ f non è debolmente crescente in alcun intervallo contenente x_0.

Esempio grafico

infinite oscillazioni smorzate con valori di massimo locale maggiori dei successivi valori di massimo locale, e comprese tra due grafici con egual retta tangente



$$\exists\, f'(0) = 1$$

per $x>0$

$$1 = \frac{x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{x^2+x}{x} \longrightarrow 1$$

per $x<0$

$$1 \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{x^2+x}{x} \longrightarrow 1$$

Teorema di Fermat.

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se x_0 è un punto interno ad A che è di massimo o di minimo locale per f e f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

<u>dim</u>: Se f è derivabile in x_0 allora

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

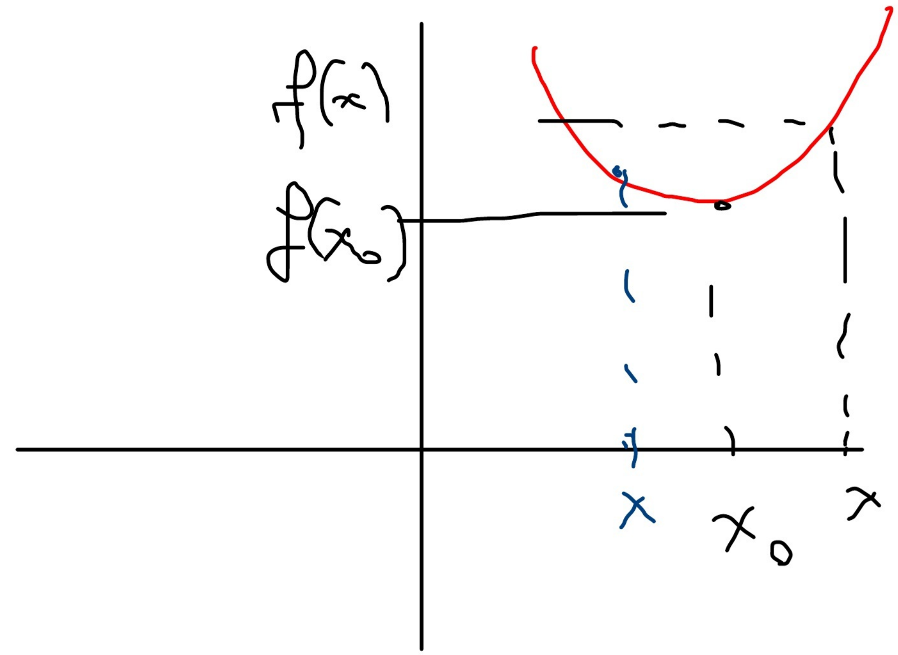
$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\geq 0}}$$

supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale per f

In un intorno di x_0

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0)\geq 0.$$



$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad f'_-(x_0) \leq 0 .$$

Ma $\quad f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f'_+(x_0) = 0 , \quad f'_-(x_0) = 0$$

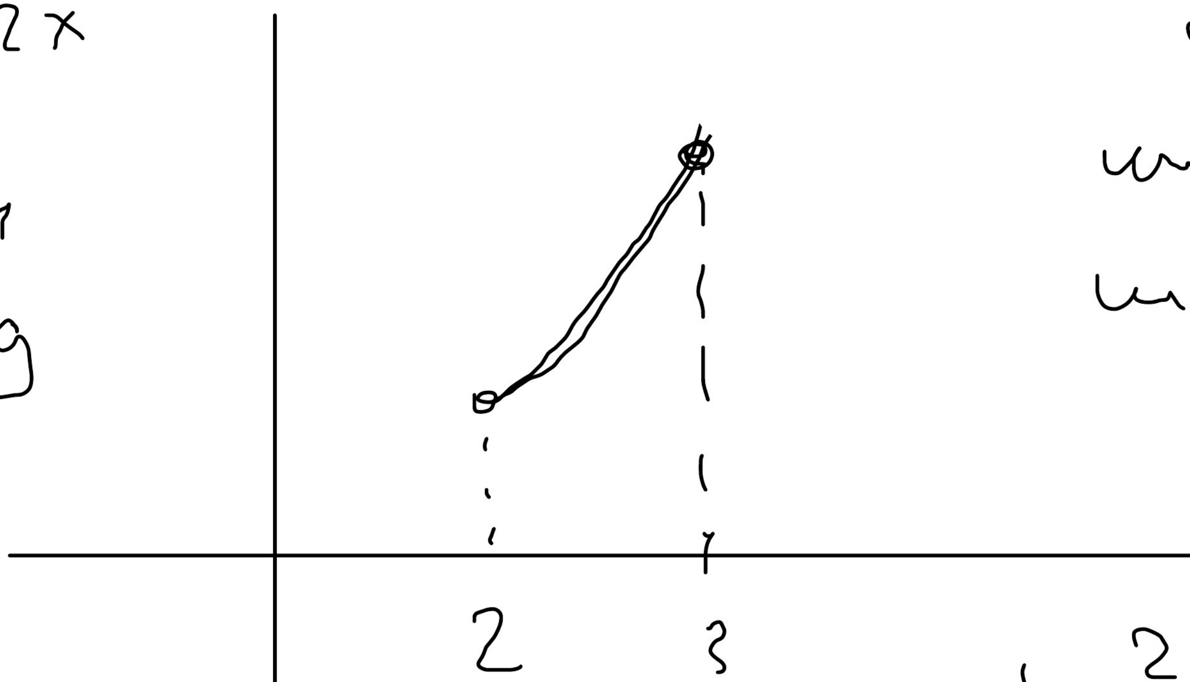
$$\Rightarrow \quad \underline{f'(x_0) = 0} .$$

Oss: Se il punto non è interno al dominio $\Rightarrow$ il teorema non è necessariamente valido.

$f'(x) = 2x$

$f'(2) = 4$

$f'(3) = 9$



$f(x) = x^2$

$\min f = f(2) = 4$

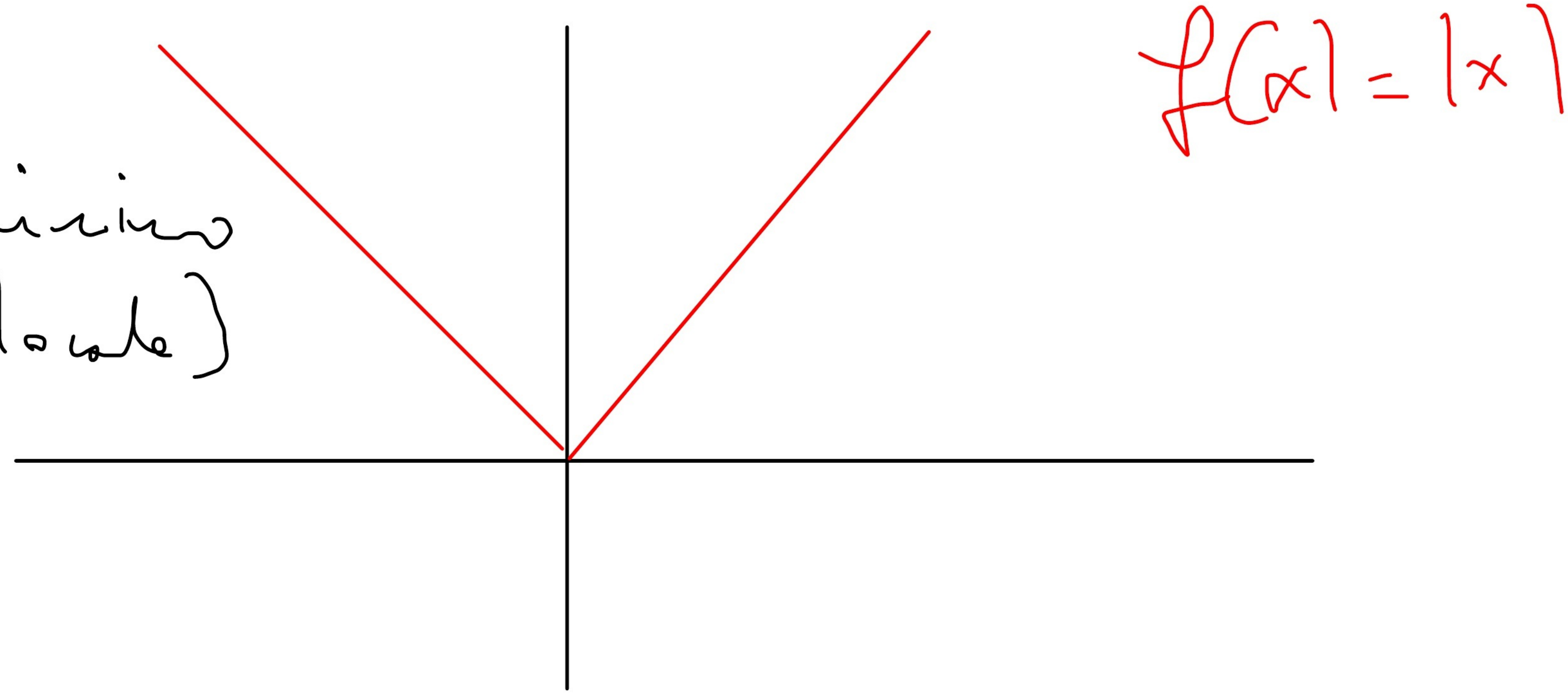
$\max f = f(3) = 9$

$f : [2,3] \to \mathbb{R}$

2, 3 non sono punti interni.

Oss: L'ipotesi di derivabilità è necessaria.

Quindi possono esserci punti di minimo o di massimo locale dove la derivata non si annulla (perché non esiste).



$x = 0$ è punto di minimo assoluto (e locale)

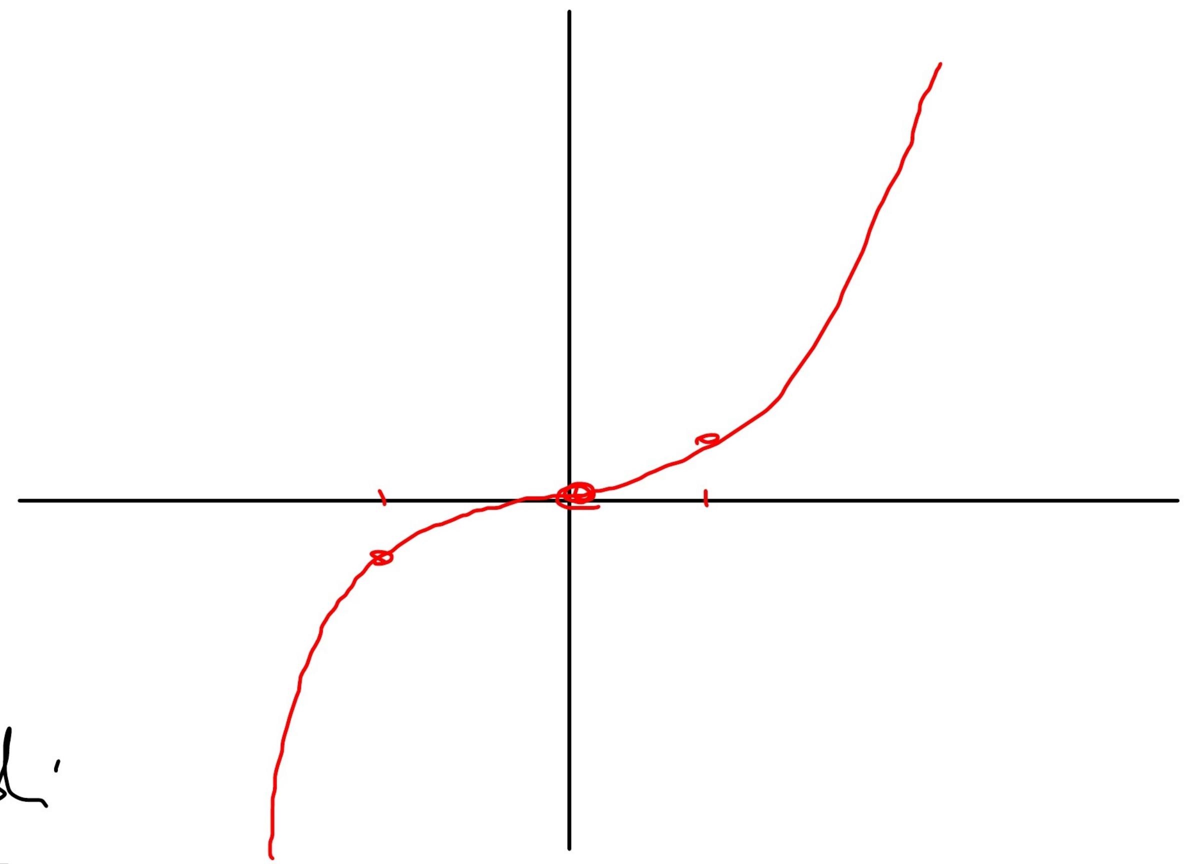
ma $f'(0) \nexists$.

Oss: Il teorema è condizione <u>necessaria</u> per un max o min locale <u>ma non suff.</u>

<u>Es</u>: $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$

$f'(0)=0$



ma $x=0$ non è né punto di max né di min locale