Esercitazione 4 22/10/2020

Esercizio 7: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-4x+4)^2}{(e^{x^2-4}-1)^4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)^4}{(e^{x^2-4}-1)^4} = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x-2}{e^{x^2-4}-1}\right)^4$

Basta considerare $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{e^{x^2-4}-1} = \dfrac{0}{e^0-1} = \dfrac{0}{0}$ f. indet.

Pongo $t = x-2$, quindi se $x\to 2$, ho $t \to 0$

e il limite con la sostituzione diventa

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^{?}-1}$$

$x^2-4 = (x+2)(x-2)$, e se $t = x-2 \Rightarrow x = t+2$

allora $(x+2)(x-2) = (t+4)t$ quindi $? = t(t+4)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{e^{t(t+4)}-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t(t+4)}{e^{t(t+4)}-1} \cdot \frac{1}{t+4}$$

e poi $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t(t+4)}{e^{t(t+4)}-1} = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{s}{e^s-1} = 1$

$s = t(t+4)$

se $t \to 0$, $s \to 0$

Quindi il limite complessivo è $1 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$

E il limite originale dato dal problema è $\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

La risposta è la (b).

(Si poteva anche usare: $e^{t(t+4)} - 1 = \left(1 + t(t+4) + o(t(t+4))\right) - 1$

$$= t(t+4) + o(t(t+4))$$

e il limite da calcolare era:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t(t+4) + o(t(t+4))} =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(t+4)\left(1 + \underbrace{\frac{o(t(t+4))}{t(t+4)}}_{\to 0 \text{ per def. di o piccolo}}\right)} = \frac{1}{4\cdot(1+0)} = \frac{1}{4}$$
)

---

8. la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0. \end{cases}$

è limitata, ha massimo e/o minimo?

Usiamo i limiti ai bordi del dominio, cioè in questo caso $+\infty$ e $-\infty$ (f def. su $\mathbb{R}$)

Controlliamo prima che f è continua.

Per $x \neq 0$ sì, perché

la funzione $\frac{1-\cos x}{x^2}$ è continua

dove è definita.

Per $x=0$, devo controllare che $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Infatti $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (limite notevole)

e per definizione effettivamente $f(0) = \frac{1}{2}$

- Si potrebbero usare le derivate.

  Provateci! E attenzione a calcolare

  bene la derivata in 0, come limite

  del rapporto incrementale $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$.

- Usiamo i limiti: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{1-\cos x}^{\text{limitata}}}{\underbrace{x^2}_{\to +\infty}} = 0$

  per il teo dei carabinieri.

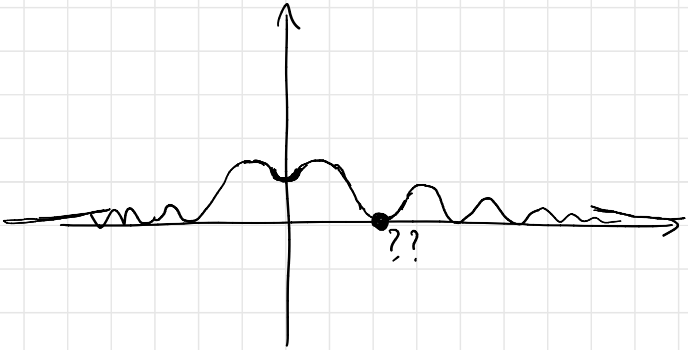
  Idem $\lim_{x\to -\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0$.

Osservo anche: visto che $-1 \leq \cos x \leq 1$

ho $0 \leq 1-\cos x \leq 2$

e quindi (visto che $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

ho $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\left(f(0) = \frac{1}{2} \right)$.



Il grafico tocca l'asse x o no?

Mi sto chiedendo se $1 - \cos x = 0$ per qualche $x \in \mathbb{R}$. Certo! se $x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

($f(x)$ è pari)

$f(x)$ ha sicuramente massimo, visto che è continua su $\mathbb{R}$, e

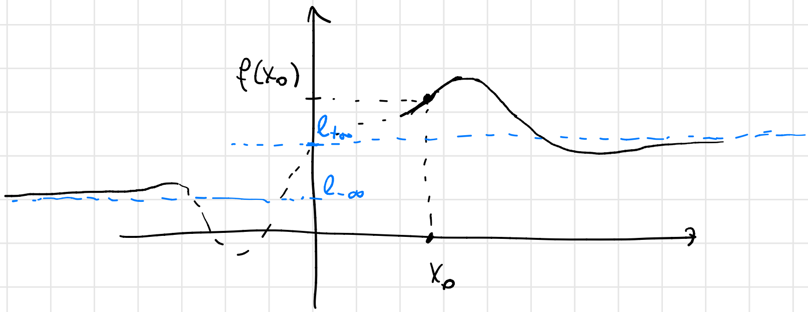
$$f(0) = \frac{1}{2} > \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0.$$

(visto a lezione - teo di Weierstrass generalizzato)

Ma ha anche minimo, perché $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e ci sono effettivamente dei punti in cui $f(x) = 0$.

La risposta è (a).

Reminder: Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, ammette limite a $\pm\infty$ e $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) >$ entrambi i limiti, allora f ha massimo in $\mathbb{R}$.



Esercizio 9: $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sin x + 3}{x - \log x}$$

. è limitata?

L'idea è guardare i limiti ai bordi del dominio.

Dominio? Il problema dice che il dominio è $(0, +\infty)$

(bisognerebbe verificare che $x - \log x \neq 0 \quad \forall x > 0$

questo è vero: in effetti la funzione

$g(x) = x - \log x$ definita su $(0, +\infty)$

è sempre positiva: $\lim_{x \to 0^+} (x - \log(x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (x - \log(x)) = +\infty - \infty$

"vince x, che cresce più velocemente di $\log(x)$"

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\log(x)) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty}\Bigg(1-\underbrace{\frac{\log(x)}{x}}_{\to 0 \text{ (limite notevole)}}\Bigg) = +\infty\cdot 1 = +\infty$$

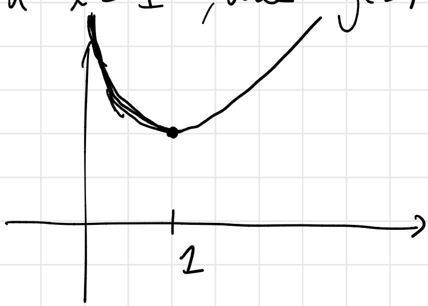
Vediamo dove $g(x)$ è crescente e decrescente, usando $g'(x) = 1-\dfrac{1}{x}$.

Quindi $g'(x) \geq 0 \iff 1-\dfrac{1}{x}\geq 0 \iff 1 \geq \dfrac{1}{x}$

$\iff x \geq 1$ ⟸ visto che $x>0$

Quindi $g(x)$ è decrescente per $0<x\leq 1$ e crescente per $x\geq 1$.

In $x=1$, vale $g(1) = 1-\log(1) = 1-0 = 1$



Quindi il minimo di $g(x)$ è 1

$\Rightarrow g(x) > 0 \quad \forall x \in (0,+\infty)$

Quindi $f(x)$ è definita su tutto $(0,+\infty)$

Calcoliamo i limiti ai bordi del dominio:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + 3}{x - \log x} = \frac{0+3}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\sin x + 3}^{\text{limitata}}}{\underbrace{x - \log x}_{\to +\infty}} = 0 \text{ per i carabinieri.}$$

Posso concludere che f è limitata per Weierstrass generalizzato.

La risposta è (d).

Esercizio 10 : $\lim_{x\to 4^-} (4-x)^{1-\cos(x-4)} = 0^{(1-1)} = 0^0 = ?!$

forma indet.

Procedimento standard : $f(x)^{g(x)} = e^{\log\left(f(x)^{g(x)}\right)} =$

$$= e^{g(x)\cdot \log(f(x))}$$

Notare che affinché sia definito $f(x)^{g(x)}$, è bene che $f(x) > 0$ per x vicini al punto limite...

Applichiamo in questo caso:

$$(4-x)^{1-\cos(x-4)} = e^{(1-\cos(x-4))\cdot\log(4-x)}$$

Calcolo $\lim_{x\to 4^-} (1-\cos(x-4))\cdot\log(4-x)$.

pongo $t=4-x$, così se $x\to 4^-$, $t\to 0^+$

e per sostituzione il limite diventa

$$\lim_{t\to 0^+} (1-\cos(-t))\cdot\log(t) =$$

$\cos(-t)=\cos(t)$

$$= \lim_{t\to 0^+} (1-\cos(t))\cdot\log(t) = (1-1)\cdot(-\infty)$$
$$= 0\cdot(-\infty)\ ??$$

uso il limite notevole di $\cos(t)$

$$= \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{(1-\cos(t))}{t^2}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{t^2\cdot\log(t)}_{\to 0} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

0 limite notevole, "t^2 vince su $\log(t)$".

Quindi il limite originale è (per continuità di e^x)

$e^0 = 1$ (risposta (d)).

Esercizio 3 $\quad f(x) = \dfrac{x^2\log x}{(x+1)(\log(x)+1)}$

Il dominio non è specificato. Vediamo dov'è definita

$f(x)$: serve:
- $x > 0$ (dal $\log(x)$)
- $(x+1)(\log(x)+1) \neq 0$

$(x+1)(\log(x)+1) = 0 \iff x+1 = 0$, cioè $x = -1$

oppure

$\log(x)+1 = 0$, cioè $\log(x) = -1$

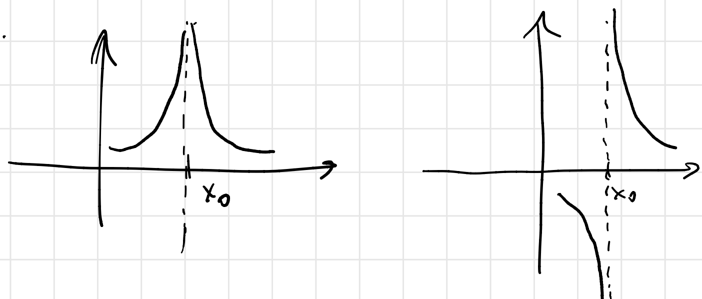
cioè $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Quindi il dominio naturale è $(0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$.

Domanda: quanti asintoti verticali ci sono?

Bisogna trovare i punti x_0 per cui $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è infinito.

(esempi:



Qui $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste! Esistono $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$

C'è un asintoto verticale quando almeno uno tra $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ è $+\infty$ o $-\infty$.

Dove $f(x)$ è definita e continua, sicuramente non c'è un asintoto verticale.

Basta controllare i bordi finiti del dominio, cioè in questo caso $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{1}{e}$

Calcoliamo $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \log x}{(x+1)(\log(x)+1)} = \frac{0}{1 \cdot (-\infty + 1)} =$

$\lim_{x \to 0^+} x^2 \log(x) = 0$ $= \frac{0}{1 \cdot (-\infty)} = \frac{0}{-\infty} = 0.$

Quindi in $x_0 = 0$ non c'è un asintoto verticale

In $x_0 = \frac{1}{e}$, Calcolo

$$\lim_{x \to (\frac{1}{e})^-} \frac{x^2 \log x}{(x+1)(\log(x)+1)} = \frac{\frac{1}{e^2} \cdot (-1)}{(\frac{1}{e}+1) \cdot (0^-)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{e^2}}{0^-} = +\infty$$

$(\frac{1}{e}+1) > 0$

Quindi in $x_0 = \frac{1}{e}$ c'è un asintoto verticale

La risposta è (a).

(il limite $\lim_{x \to (\frac{1}{e})^+} = -\infty$, quindi in questo caso i due limiti sono diversi...)

Esercizio 6 :

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x^4}{x^6 + (\sin x)^2}$$

ha massimo e/o minimo?

Osservo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\left(x^4 > 0,\ x^6 > 0,\ (\sin x)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right)$

e che $f(x)$ e' pari:

infatti
$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^6 + (\sin(-x))^2} = \frac{x^4}{x^6 + (-\sin(x))^2} = \frac{x^4}{x^6 + (\sin(x))^2} = f(x)$$

Quindi possiamo restringerci a $x > 0$.

Per capire se è limitata studiamo i limiti ai bordi del dominio (in $\mathbb{R}_{>0}$)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^4}{x^6 + (\sin(x))^2} = \frac{0}{0} \quad \text{f. indetermin.}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{x^2} \cdot \left(x^4 + \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\nearrow 0}{x^2}}{\underset{\searrow 0}{x^4} + \underbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2}_{\downarrow\ 1}}$$

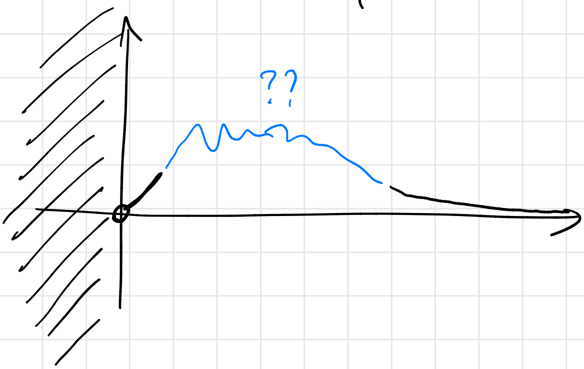
$$= \frac{0}{0+1} = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^6 + (\sin(x))^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{f. indet.}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^4}}{x^{\cancel{6}\,2}\left(1 + \underbrace{\frac{(\sin(x))^2}{x^6}}\right)} = \frac{1}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$\downarrow$
0
per i Carabinieri

Concludo che f è limitata.



Ha massimo per Weierstrass generalizz.

e non ha minimo, perché $f(x) > 0$ $\forall x$ nel dominio

e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Quindi la risposta giusta è (c).

Esercizio 5 : $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 7x^4 + 5|x|^{5/2}}{e^{x^4} - e^{-x^4}} = \frac{0}{0}$

- Usare il limite notevole di e^t, scrivendo
$$e^{x^4} - e^{-x^4} = e^{\cancel{x^4}} - 1 - (e^{-x^4} - 1) \;\ldots$$
- Con gli o piccoli: $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$

pongo $t = x^4$ e $t = -x^4$, ottengo

ok perché $x^4 \to 0$ ....

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4)$$
$$e^{-x^4} = 1 - x^4 + o(-x^4) = 1 - x^4 + o(x^4)$$

Quindi $e^{x^4} - e^{-x^4} = \cancel{1} + x^4 + o(x^4) - \cancel{1} + x^4 - o(x^4)$

$$= 2x^4 + o(x^4) - o(x^4)$$

$$= 2x^4 + o(x^4)$$

Quindi trovo $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+7x^4+5|x|^{\frac{5}{2}}}{2x^4+o(x^4)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^2+7x^4+5|x|^{\frac{5}{2}}}{x^4\left(2+\underbrace{\frac{o(x^4)}{x^4}}_{\to 0}\right)} =$$

O grande

per $x\to 0$, la potenza di x che "vince" è quella con esponente più piccolo

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{4}\,2}} \cdot \frac{(3+\underbrace{7x^2}_{\to 0}+\underbrace{5|x|^{\frac{1}{2}}}_{\to 0})}{\left(2+\underbrace{\frac{o(x^4)}{x^4}}_{\to 0}\right)}$$

$x\to 0$

$$= (+\infty)\cdot\frac{3}{2} = +\infty.$$

Quindi la risposta è (d).

Esercizio 3.39 (b) del foglio sugli o piccoli.

Controllare che $\operatorname{sen}(\cos x - e^x) = x + o(x)$ per $x\to 0$

Usiamo gli sviluppi $\operatorname{sen}(t) = t + o(t)$ per $t\to 0$

$e^t = 1 + t + o(t)$ per $t\to 0$

$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ $\rightsquigarrow$ $\cos(t) = 1 + o(t)$ per $t\to 0$

Quindi $\cos x - e^x = 1 + o(x) - (1 + x + o(x)) =$

$$= -x + o(x)$$

$$\sin(\cos x - e^x) = \sin(\underbrace{-x + o(x)})$$

Uso lo sviluppo del $\sin(t)$ ponendo $t = -x + o(x)$.

(Notare che $-x + o(x) \longrightarrow 0$ quando $x \to 0$. quindi la sostituzione è lecita)

$$\sin(\cos x - e^x) = \sin(-x + o(x)) = -x + o(x) + o(-x + o(x))$$

$$= -x + o(x) + o(-x) + o(o(x))$$

$$= -x + o(x) + o(x) + o(x)$$

$$= -x + o(x)$$

Controllate che se $f(x) = \sin(\cos x - e^x)$

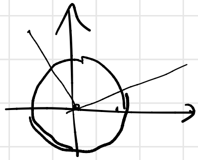
$$f'(0) = -1 .$$

(c) $\cos(\pi x) = \ldots\ldots$ per $x \to 1$

Non c'è uno sviluppo "notevole" di $\cos(t)$ quando $t \to \pi$.

Si può cercare di ricondursi al sin di qualcosa

$$\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$



$\cos(\pi x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ però non sembra aiutare molto...

Poniamo $t = x - 1$, così $t \to 0$ quando $x \to 1$,

devo considerare

$$\cos(\pi(t+1)) = \cos(\pi t + \pi) =$$

$$= -\cos(\pi t) = -\left(1 - \frac{(\pi t)^2}{2} + o((\pi t)^2)\right)$$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$