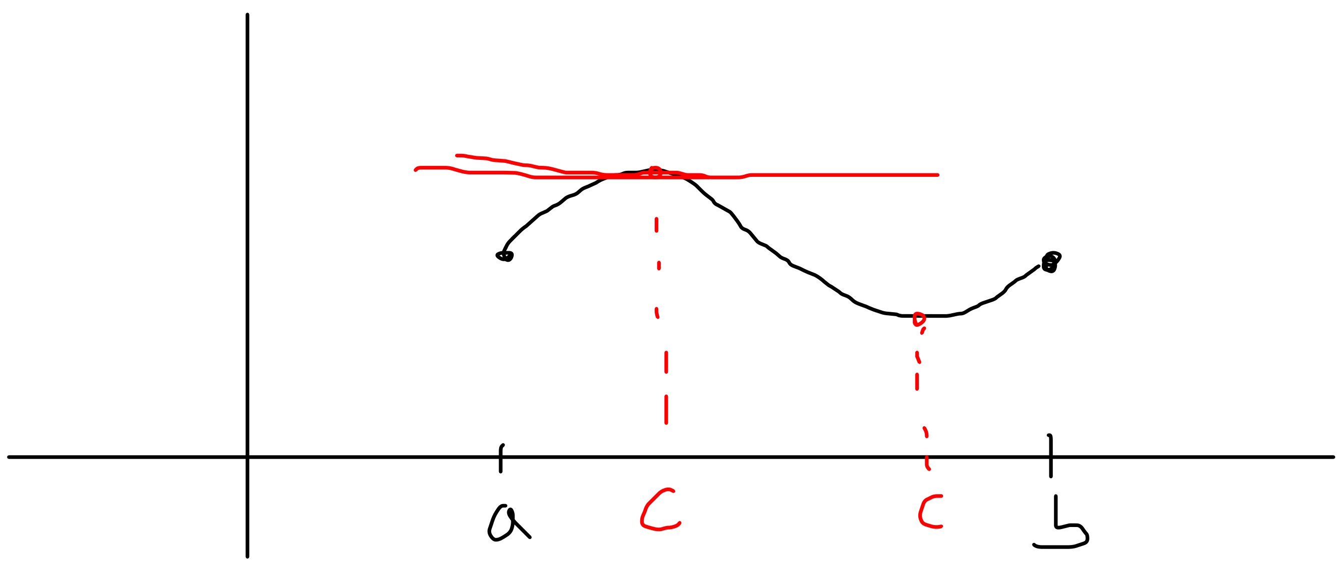
# Teorema di Rolle

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$. Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.



dim: $f$ è continua in $[a,b]$ quindi per il teorema di Weierstrass assume max e min.

Siano $x_1$ e $x_2 \in [a,b]$ i punti di max e di min cioè $f(x_1) = \max(f)$, $f(x_2) = \min(f)$.

Caso 1) $x_1 = a$, $x_2 = b$ o viceversa.

Dato che $f(a) = f(b)$ allora sarebbe $\max(f) = \min(f) \Rightarrow f$ è costante in $[a,b]$

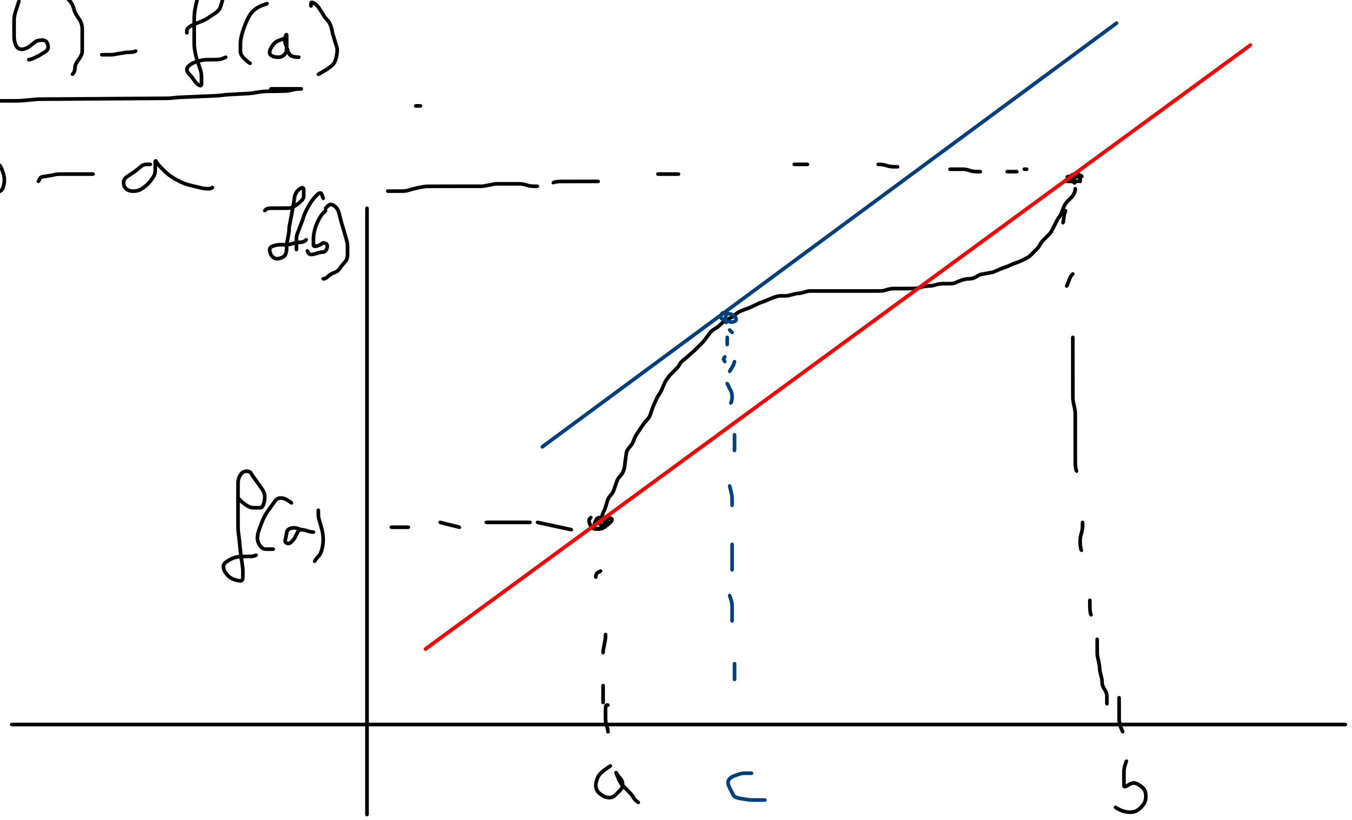
$\Rightarrow f'(c) = 0 \quad \forall\, c \in (a,b)$.

caso 2) almeno uno dei due punti $x_1$ o $x_2$ non è negli estremi. Allora esiste un punto $c$ di massimo o di minimo interno ad $(a,b)$ quindi, per il teorema di Fermat, $f'(c)=0$.

# Teorema di Lagrange

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ , continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} .$$



dim: Definiamo

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

è una retta che passa per gli estremi del grafico

$(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Definiamo anche

$$g(x) = f(x) - r(x)$$

$g$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$

$g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0$

$g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) = 0$

allora $g(a) = g(b)$ e posso applicare Rolle alla funzione $g$.

Quindi $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$.

Calcoliamo

$$g'(x) = f'(x) - r'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$g'(c) = 0$ quindi $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$\sqcup$

# Teorema di Cauchy

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in $(a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Se inoltre $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$ allora la relazione precedente si può scrivere come

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

# Conseguenze del th. di Lagrange

**Teorema**: $I \subset \mathbb{R}$ sia un intervallo.

$f: I \to \mathbb{R}$ continua in $I$ e derivabile in $\mathrm{int}(I)$

Allora valgono le seguenti affermazioni:

1) Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è costante in $I$
2) Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è debol. crescente in $I$
3) Se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è debol. decrescente in $I$
4) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è strett. cresc. in $I$
5) Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è strett. decresc. in $I$.

dim di 4): Prendiamo $x_1, x_2 \in I$ con $\boxed{x_1 < x_2}$

Devo mostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.

Osservo che $(x_1, x_2) \subset \mathrm{Int}(I)$. Allora applico il th. di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$.

Quindi $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ma $f'(c) > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\boxed{x_2 - x_1}} > 0$

$> 0$

quindi $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

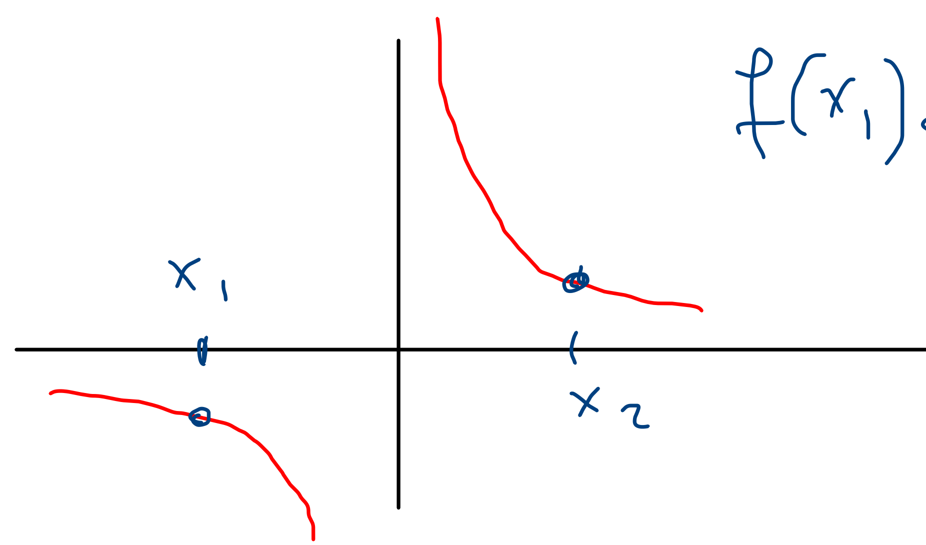
$\square$

Oss: Se $f$ non è definita su un intervallo il teorema potrebbe non essere vero.

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{non è un intervallo}} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \neq 0$ ma $f$ non è decrescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x_1) < f(x_2)$



$f$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

---

**Es**: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

è derivabile e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow$ $f$ è costante in $(0, +\infty)$.

quanto vale la costante?

La calcolo in $x=1$.

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } \boxed{x > 0} \quad x \in (0, +\infty).$$

Se $x < 0$? $f$ è costante perché $f'(x) = 0$

(ho definito $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$).

per calcolare la costante valuto $f$ in $x = -1$

$$f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\pi/2$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{se } \boxed{x<0}$$

Si poteva anche dedurre dal fatto che

$f(x)$ è dispari.

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ è dispari.

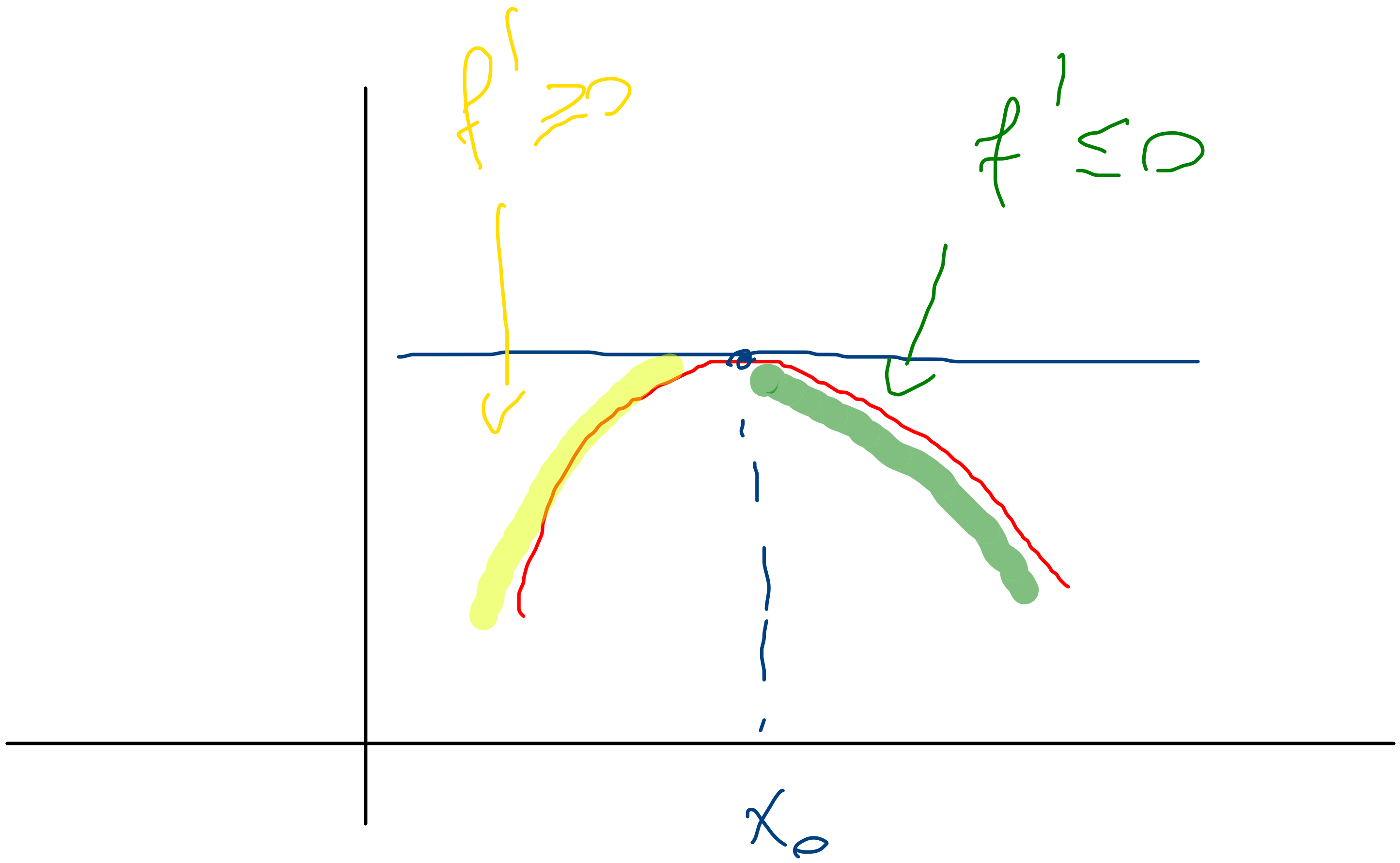
**Prop**: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f$ derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in $I$.

Valgono:

f' non è necessariamente definita in $x_0$

1) Se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di $x_0$ e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di $x_0$ allora $x_0$ è punto di minimo locale per $f$.

2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di $x_0$ e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di $x_0$ $\Rightarrow$ $x_0$ è punto di max locale per $f$.



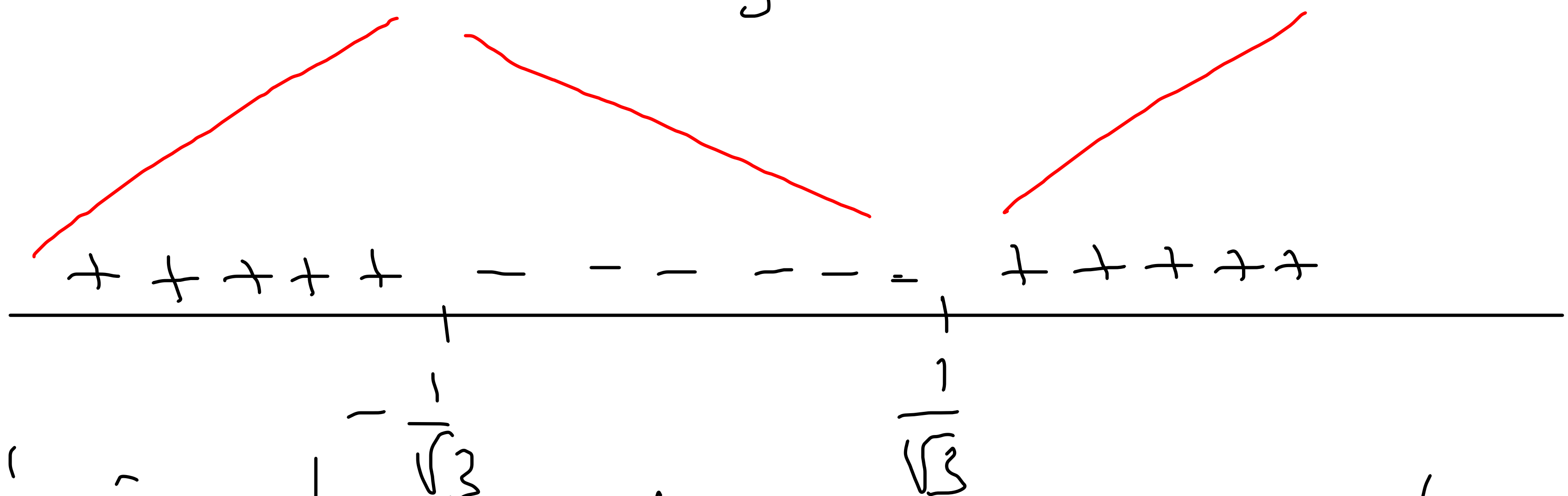
f' ≥ 0
f' ≤ 0
$x_0$

Es: $f(x) = x^3 - x$ $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

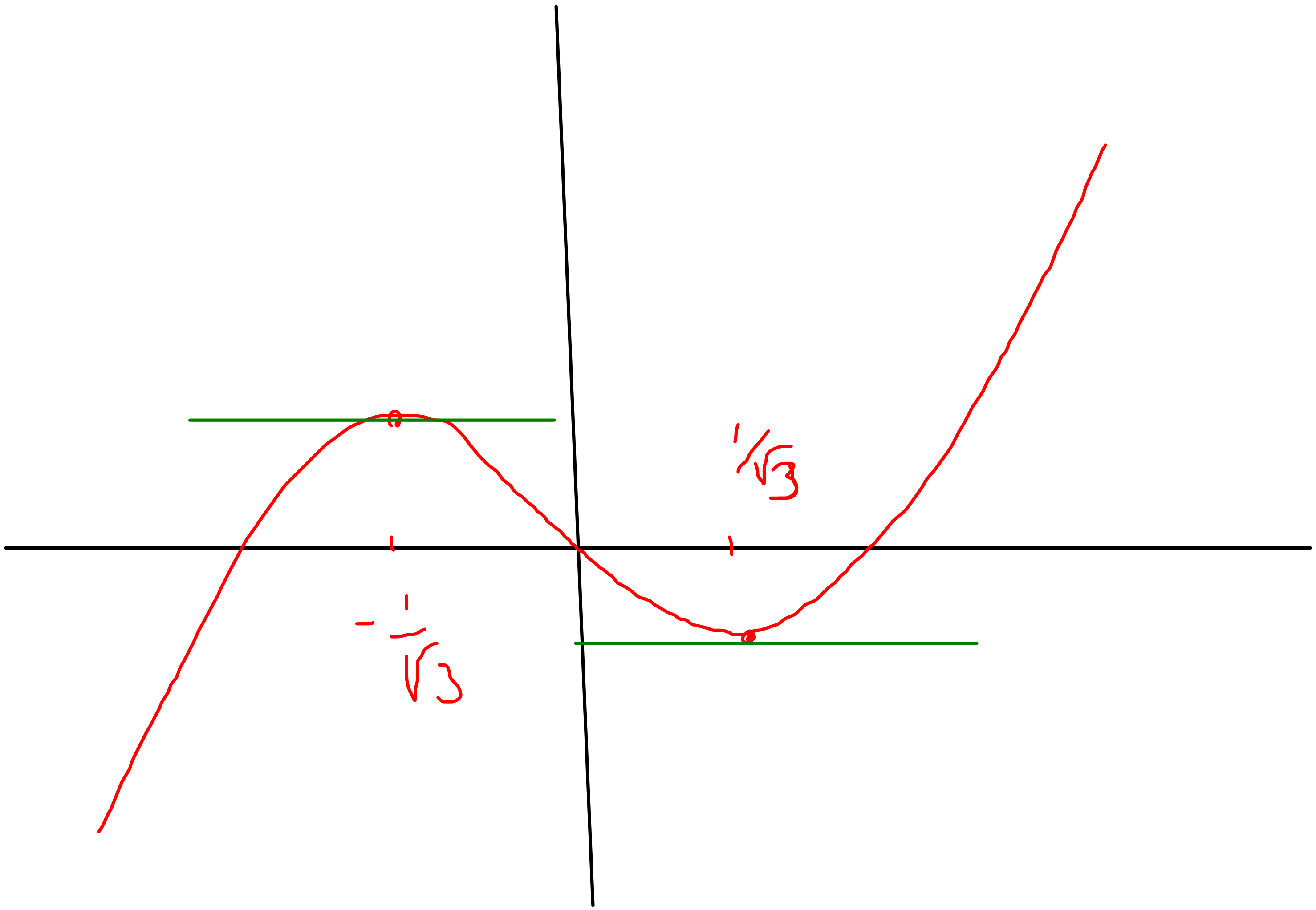
$f'(x) = 3x^2 - 1$ studiamo il segno di $f'$.

$$3x^2 - 1 \geq 0 \iff 3x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{3} \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

cioè $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.




$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di max locale, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ è di min. locale.

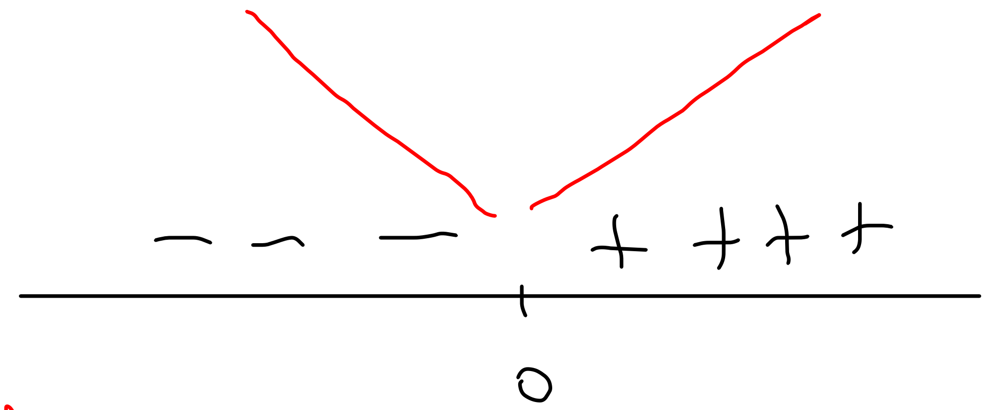


$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Cosa succede nel caso $f$ non sia derivabile in $x_0$

Es: $f(x) = |x|$ $\quad$ $f$ non è derivabile in $x_0 = 0$

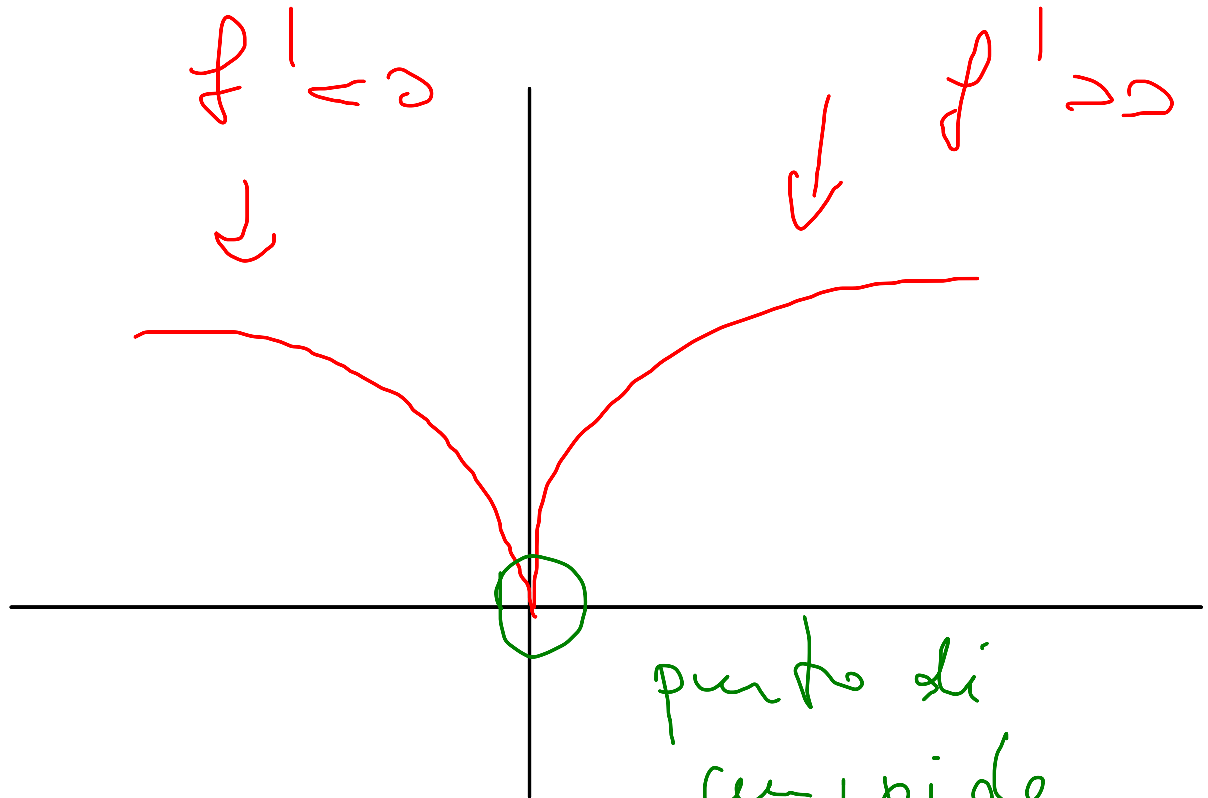
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$




$x_0 = 0$ è punto di minimo.

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$

$f$ è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$




punto di cuspide ma è anche punto di minimo.

<u>Teorema</u> : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$

$f$ derivabile 2 volte in $x_0$ e $f'(x_0) = 0$.

Allora valgono:

1) Se $x_0$ è punto di minimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
2) Se $x_0$ è punto di max locale $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

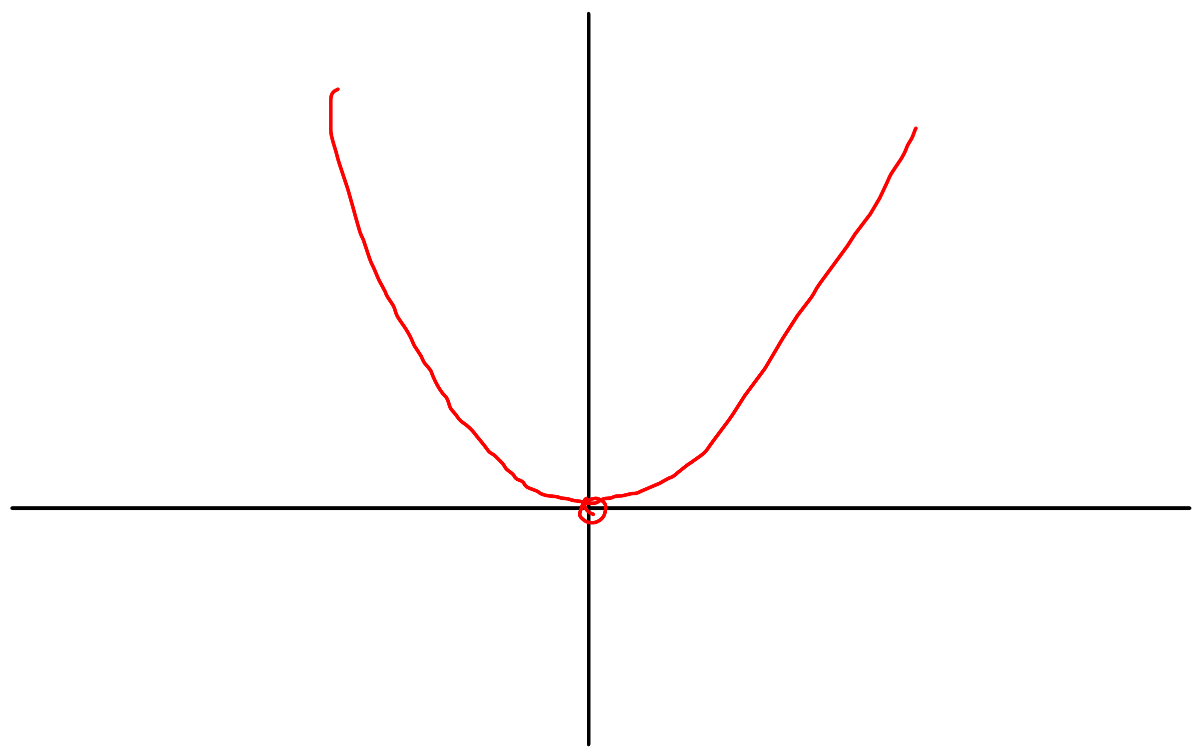
necess.

3) Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale
4) Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di max locale

suffic.

**Es**: $f(x) = x^2$   $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$ sempre

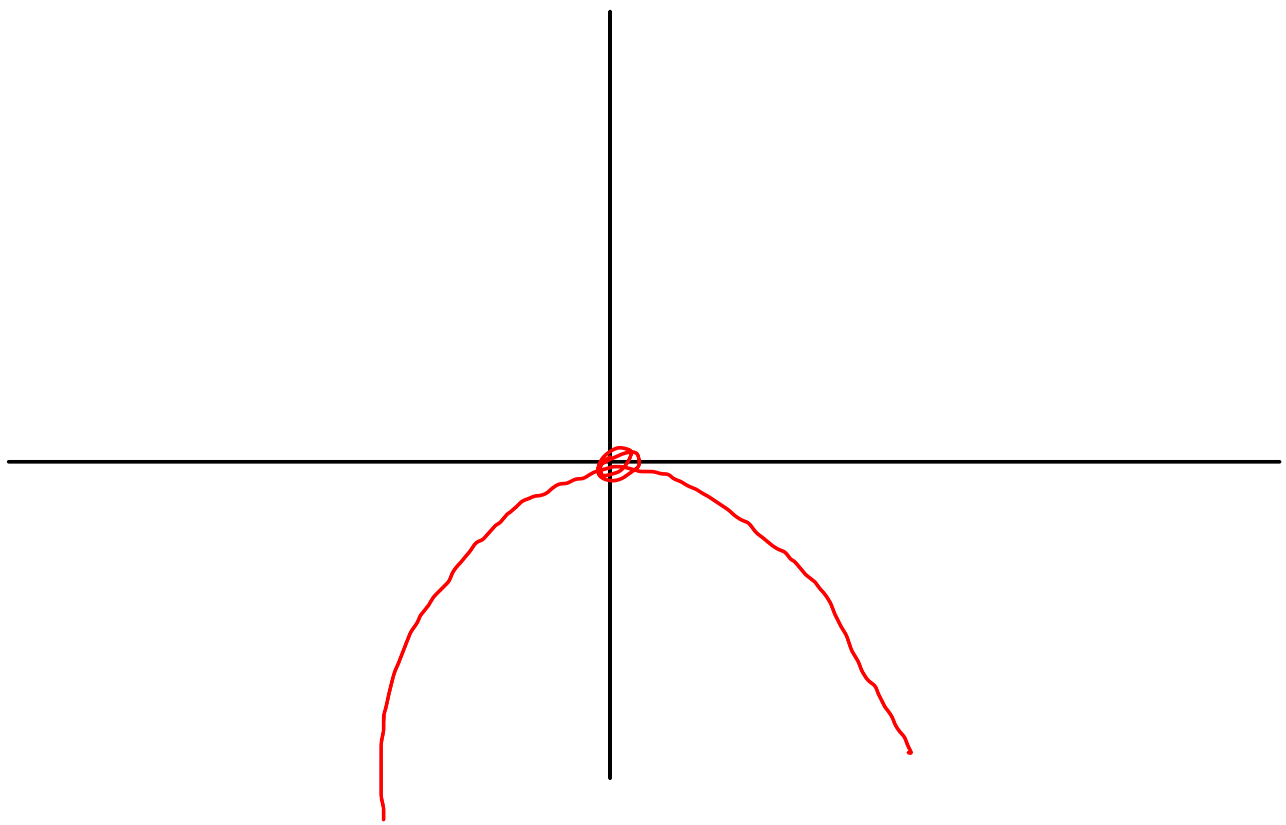
$f'(0) = 0$, $f''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ è punto di minimo locale.



Es: $g(x) = -x^2$ $\quad g'(x) = -2x$ $\quad g''(x) = -2$

$g'(0) = 0$ $\quad g''(0) = -2 < 0$

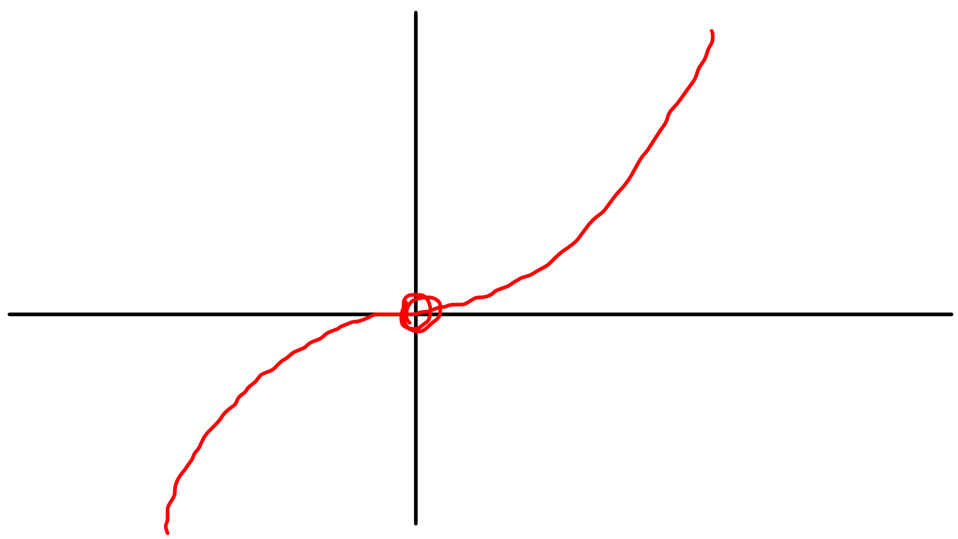
$\Rightarrow x_0 = 0$ è punto di max locale



Es: Se $f''(x_0)=0$ non posso affermare niente. Infatti consideriamo

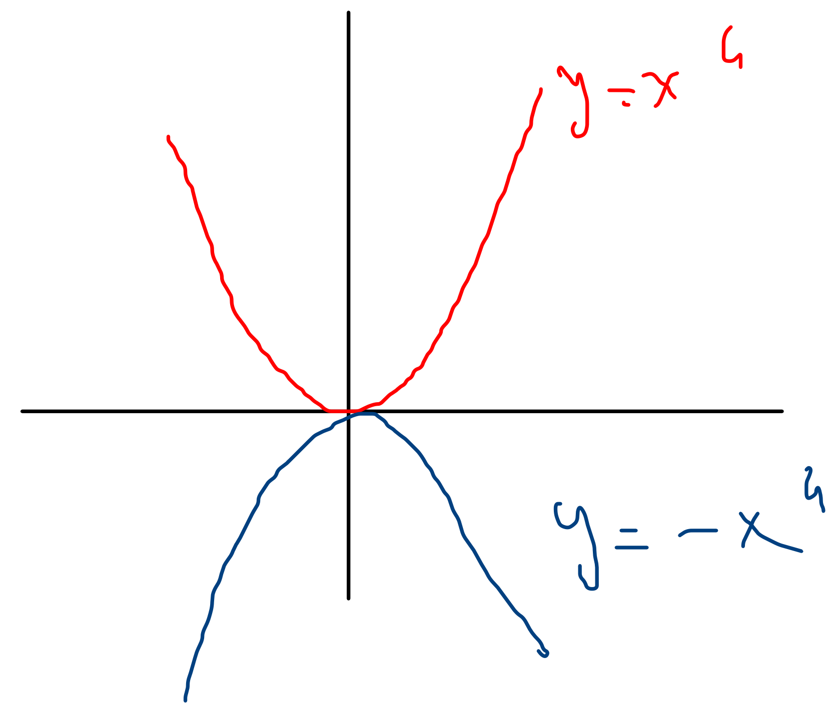
$h(x) = x^3$ $\qquad h'(x) = 3x^2$, $h''(x) = 6x$

$h'(0)=0$, $h''(0)=0$ ma $x_0=0$ non è né punto di max né di minimo locale.



Es: $f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ e in questo caso $x_0 = 0$ è punto di minimo




$g(x) = -x^4 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$

ma $x_0 = 0$ è punto di massimo

# Teorema di de l'Hôpital

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $(a,b)$. Se valgono le seguenti condizioni

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ oppure

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm \infty$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm \infty$

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di $a$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Stesso risultato per $x \to b^-$.

<u>Oss</u>: funziona anche nel caso di $x_0$ interno all'intervallo perché basta fare i due limiti destro e sinistro.

Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$

$f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$ $\qquad g(x) = x^4$.

$f'(x) = -2\sin x + 2x$ $\qquad g'(x) = 4x^3$

provo a fare

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

applicare di nuovo de l'Hôpital

derivo di nuovo e provo a calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

derivo ancora

$$\lim_{x\to 0} \frac{+2\sin x}{24x} = \frac{1}{12} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}$$

applicando 3 volte il th. di de l'Hôpital ho che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

Es: $\lim_{x\to\infty} \boxed{\dfrac{e^x}{x^2}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital derivando num. e denom.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

derivo di nuovo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty .$$

Oss: Verificare sempre l'ipotesi 1) cioè di essere in una forma indeterminata.

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

se non mi accorgo che l'ipotesi 1) non vale e applico de l'Hôpital (sbagliando).

derivo

$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{sbagliato}}$

Oss: potrebbe non esistere il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ma esistere il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Es: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $\quad g(x) = x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\boxed{x^2}\,\boxed{\sin\frac{1}{x}}}{x} = \frac{0}{0}$$

limitata

applico de l'Hôpital e derivo

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1$$

$\to 0 \cdot \text{limitata} = 0$

non esiste

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\boxed{2x\sin\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1} = \text{non esiste}$$

ma invece $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\sin\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = 0\cdot\text{limitata} = 0$

quindi in questo caso $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$

ma $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Sarebbe quindi sbagliato concludere che

se $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \nexists$ neanche $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Oss: Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (finito)

e $\nexists \lim_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x)$.

dim: per assurdo se $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = m$

allora $g(x) = \underbrace{(f+g)(x)}_{\downarrow \, m} - \underbrace{f(x)}_{\downarrow \, \ell} \longrightarrow m - \ell$

assurdo perché $\nexists \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Corollario: Se $f$ è continua in $x_0$ e derivabile in un intorno di $x_0$ (eccetto al più in $x_0$) e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora $f'(x_0) = l$.

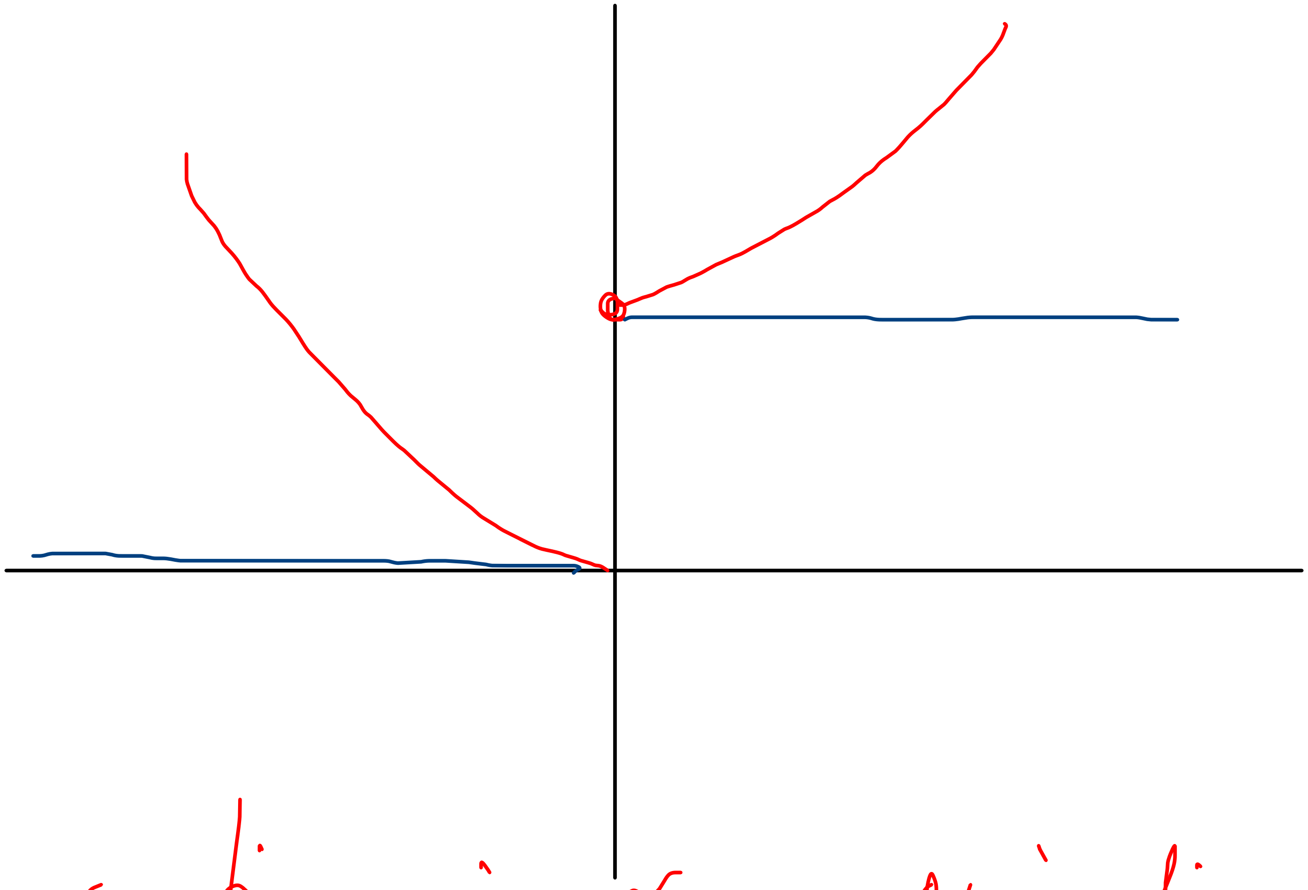
Es:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f$ è derivabile in $x_0 = 0$ ?

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

quindi? è derivabile? **NO**



f non è continua in $x_0 = 0$ quindi non è derivabile.

Oss: Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f'(x)$ non è detto che $f$ non sia derivabile in $x_0$.

Es: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

è continua in $x_0 = 0$ perché

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$$

è derivabile?

1) provo a calcolare il limite della derivata

Se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 0 - \nexists \Rightarrow \nexists$$

non esiste il limite di $f'(x)$

Da questo non posso concludere che $f$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

2) Faccio il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x} - \overset{f(0)}{0}}{\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 .$$

$\Rightarrow$ $f$ è derivabile e $f'(0) = 0$.

## Esempi di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \boxed{\frac{e^{-1/x}}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{0^+}}}{0^+} = \frac{e^{-\infty}}{0^+} = \frac{0^+}{0^+}$$

derivo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \boxed{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}}$$

è peggio di prima.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty} \quad \text{per } x \to 0^+$$

de l'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}}$$

$$D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D\left(x^{-2}\right) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

derivo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2}{e^{1/x} \cdot x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{e^{1/x}}$$

è migliorato.

è ancora indeterminato $\frac{\infty}{\infty}$

de l'Hôpital di nuovo. Derivo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{\cancel{x^2}}}{e^{1/x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{1/x}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

---

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$$