CONDIZIONI DIFFERENZIALI SUFFICIENTI PER LA MONOTONIA

A) Considerando che $f:(\alpha;\beta)\to\mathbb{R}$ è monotona se e solo se il segno di $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ è costante, i teoremi utili permettono di

ESPRIMERE I RAPPORTI INCREMENTALI CON LA DERIVATA

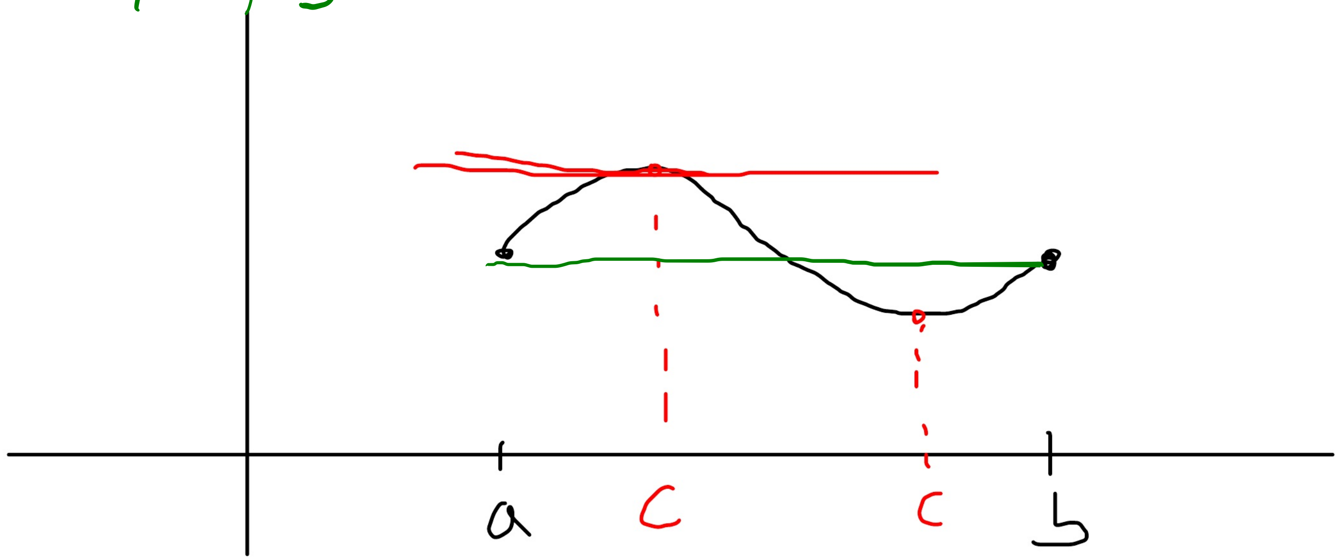
B) Le idee geometriche sono: 1) $\frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ pendenza corda di estremi $(u,f(u)),(v,f(v))$, 2) $f'(c)$ pendenza retta tangente al grafico in $(c,f(c))$, e 3) che una corda di una curva liscia è sempre parallela a qualche retta tangente alla curva (Teo. Cauchy)

C) Per dimostrare ciò si parte dal caso più semplice:
corda orizzontale di un grafico (Teo. Rolle), quindi si passa a corde generiche di grafici (Teo Lagrange), che dà quanto voluto.
Nell'ordine di dimostrazione il caso generale viene per ultimo (Teo Cauchy).

Teorema di Rolle

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.

$c \neq a, b$



dim: 0) f è continua in $[a,b]$ quindi per il teorema di Weierstrass assume max e min.

Siano x_1 e $x_2 \in [a,b]$ i punti di max e di min

cioè $f(x_1) = \max(f)$, $f(x_2) = \min(f)$.

Caso 1) $x_1 = a$, $x_2 = b$ o viceversa.

Dato che $f(a) = f(b)$ allora sarebbe

$\max(f) = \min(f) \Rightarrow f$ è costante in $[a,b]$

$\Rightarrow f'(c) = 0 \quad \forall\, c \in (a,b)$.

$\max f = \min f = f(b) \leq f(x) \leq f(a) = \max f$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) = f(a)$

caso 2) almeno uno dei due punti x_1 o x_2 non è negli estremi. Allora esiste un punto c di massimo o di minimo interno ad (a,b) quindi, per il teorema di Fermat, $f'(c)=0$.

$\boxed{\Sigma}$

Teorema di Lagrange

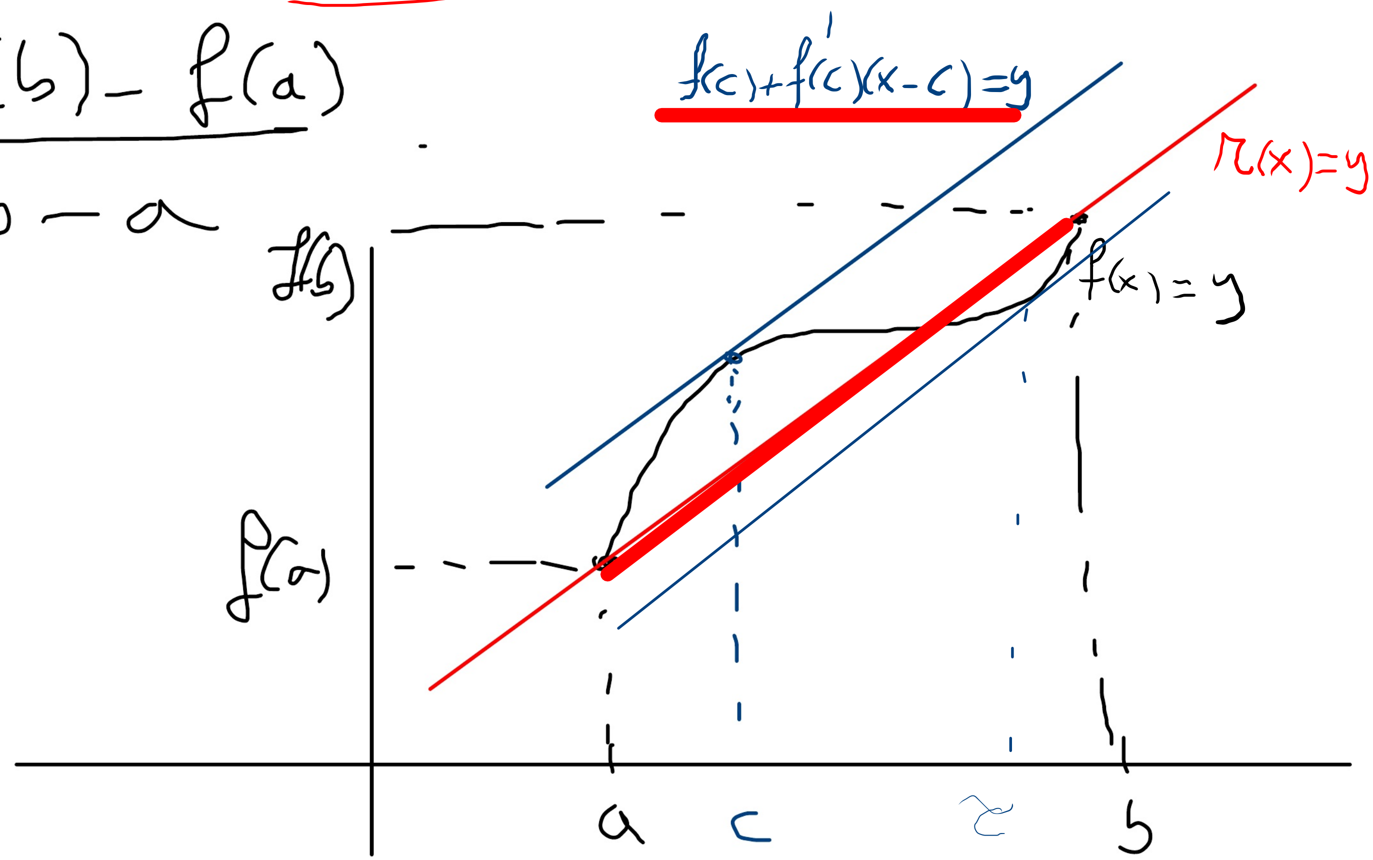
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora $\exists\, c\in(a,b)$ t.c.

$c\neq a,b$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

TROVO

dato



$f'(\tilde c)$

PENDENZA CORDA

Polinomio di primo grado in x

<u>dim</u>: Definiamo

$$\boxed{r(x)} = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

il suo grafico è una retta che passa per gli estremi del grafico.

$(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

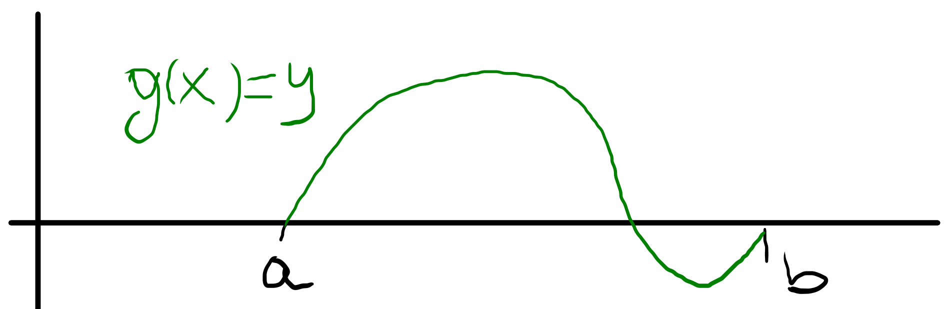
$r(a) = f(a)$

$r(b) = \cancel{f(a)} + \frac{f(b)-\cancel{f(a)}}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)}$

Definiamo anche

$$\boxed{g(x) = f(x) - r(x)}$$

g è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)



Rolle su g!

$$g(a) = f(a) - r(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - r(b) = f(b) - f(b) = 0$$

allora $g(a) = g(b)$ e posso applicare Rolle alla funzione g.

Quindi $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$.

Calcoliamo

$$g'(x) = f'(x) - r'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$g'(c) = 0$ quindi $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0$

$$\Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \square$$

Teorema di Cauchy

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c)\big(g(b)-g(a)\big) = g'(c)\big(f(b)-f(a)\big).$$

Se inoltre $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ allora la relazione precedente si può scrivere come

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

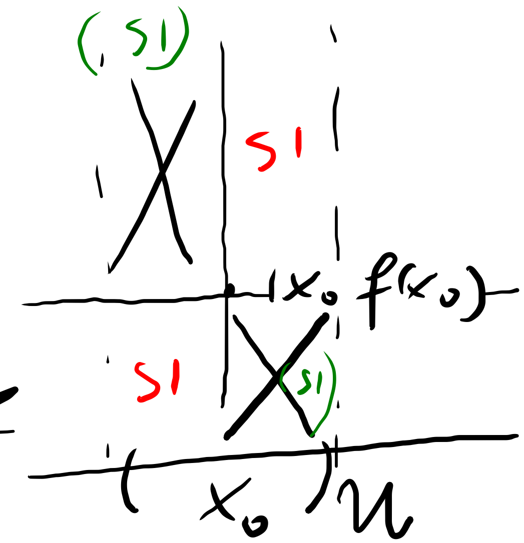
Lemma

Se f è derivabile in x_0

ed $f'(x_0) > 0$

$(<)$

$\exists\, \mathcal{U}$ intorno di x_0 tale che



$\forall x \geq x_0 \quad x \in \mathcal{U} \qquad f(x) \overset{(\leq)}{\geq} f(x_0)$

$\forall x \leq x_0 \quad x \in \mathcal{U} \qquad f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0)$

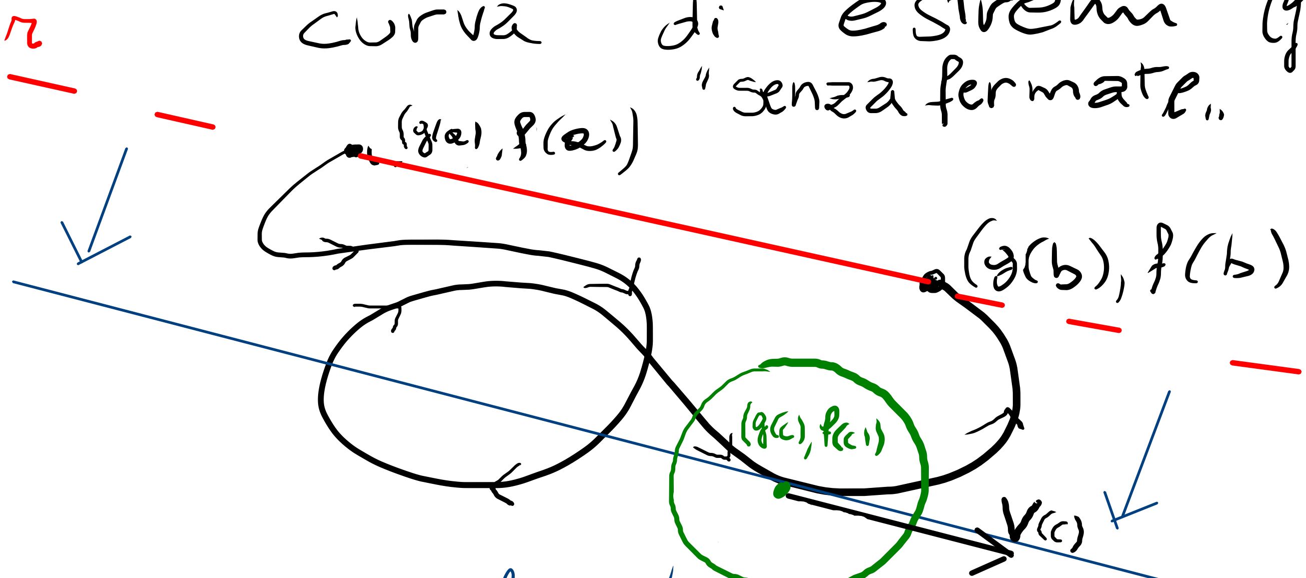
DIM ipotesi $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to 0} = f'(x_0) + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{o(1)} \quad x \to x_0$$

$\exists\, \mathcal{U}$ di (x_0) $\quad |o(1)| < \frac{f'(x_0)}{2}$

Idea geometrica

f • al variare di $x \in [a;b]$ i punti del piano cartesiano di coordinate $(g(x), f(x))$ descrivono il percorrere una curva di estremi $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$ "senza fermate" i.e. $f'(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$



∴ La corda con tali estremi ha pendenza $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

∴ Muovendo parallelamente a se stessa la retta r ove giace la corda vicino a dove si stacca dalla curva, si ottiene una retta tangente alla curva in un suo punto $(g(c), f(c))$

∴ vedendo $c = x$ come tempo, il vettore velocità istantanea (tangente alla curva) è $v(c) = (g'(c), f'(c))$, con pendenza $f'(c)/g'(c)$

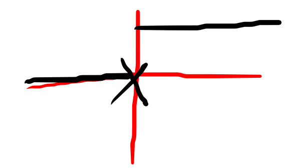
Conseguenze del th. di Lagrange

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ sia un intervallo.

senza tale ipotesi le implicazioni sono false

$f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $\mathrm{int}(I)$

Allora valgono le seguenti affermazioni:



interallo

1) Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è costante in I

2) Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è debol. crescente in I

3) Se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è debol. decrescente in I

4) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è strett. cresc. in I $\quad \not\Leftarrow \quad x^3$

5) Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathrm{Int}(I) \Rightarrow f$ è strett. decresc. in I.

CONDIZIONI DIFFERENZIALI SUFFICIENTI PER LA MONOTONIA

Voglio dimostrare che f è strett. crescente nell'intervallo sapendo che $f'(x) > 0$ nell'interno.

dim di 4): Prendiamo $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

Devo mostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.

Osservo che $(x_1, x_2) \subset \operatorname{Int}(I)$. Allora applico il th. di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$.

Quindi $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

> 0

Ma $f'(c) > 0 \implies \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{\boxed{x_2 - x_1}} > 0$

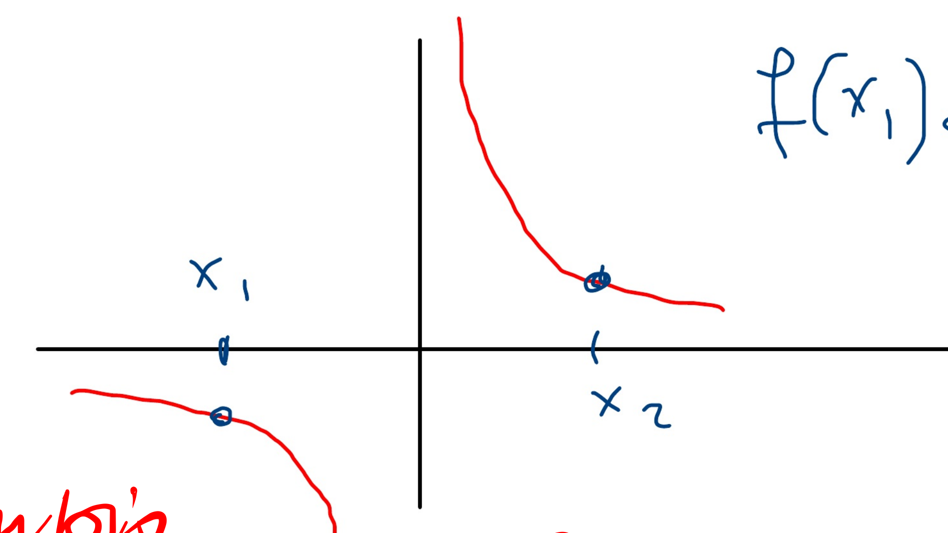
quindi $f(x_2) - f(x_1) > 0 \implies f(x_2) > f(x_1)$

$\square$

Oss: Se f **non è definita su un intervallo** il teorema potrebbe **non essere vero**.

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{non è un intervallo}} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall\, x \neq 0$ ma f **non** è **decrescente** in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



$f(x_1) < f(x_2)$

Stesso controesempio per la monotonia stretta delle **funzioni cont. iniettive**

f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$.

Es: $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

funzione con derivata nulla non costante

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$(\operatorname{arctg})'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

è derivabile e

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow f$ è costante in $(0, +\infty)$.

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

quanto vale la costante?

La calcolo in $x=1$.

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \text{se } \boxed{x > 0} \quad x \in (0,+\infty).$$

Se $x < 0$? f è costante perché $f'(x) = 0$

(ho definito $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$).

per calcolare la costante valuto f in $x = -1$

$f : (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \text{costante} = f(-1)$

$f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\pi/2$

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ se $\boxed{x<0}$

Si poteva anche dedurre dal fatto che

$f(x)$ è dispari.

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ è dispari.

Osservazione:

quindi $f'(x) = 0 \ \forall x \in \operatorname{dom} f$ $\boxed{\cancel{\Longrightarrow}}$ f costante su dom f

Un esempio più semplice $f(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$ $\forall x \ \exists f'(x) = 0$

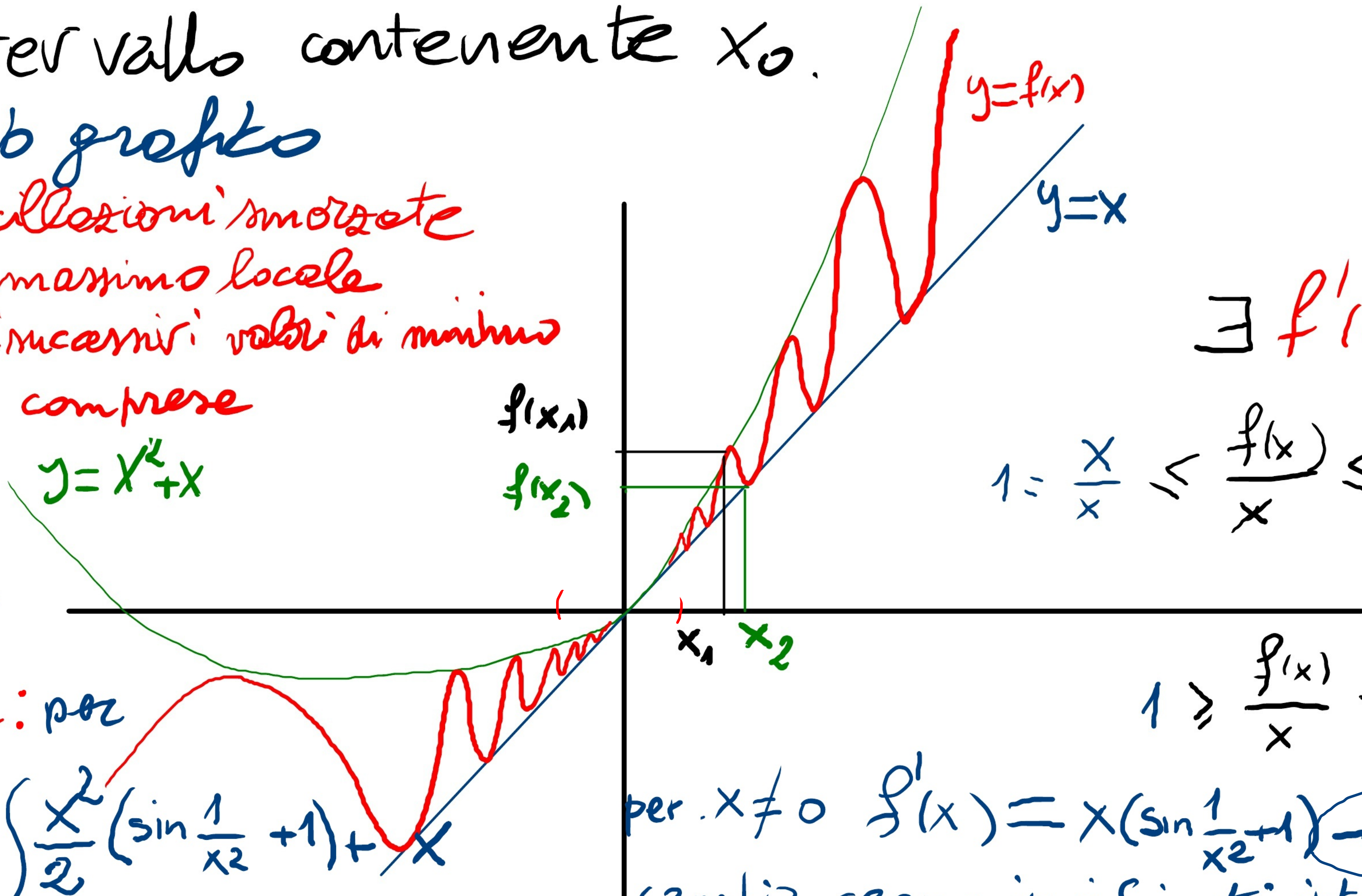
$\operatorname{dom} f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ è fatto da 2 intervalli!

Osservazione:

Vi sono funzioni derivabili in ogni punto di $\mathbb{R}$ per cui anche se $f'(x_0) > 0$ (cfr. Lemma: in un intorno di x_0 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$) f non è debolmente crescente in alcun intervallo contenente x_0.

Esempio grafico

infinite oscillazioni smorzate con valori di massimo locale maggiori dei successivi valori di minimo locale, e comprese tra due grafici con egual retta tangente: per esempio



$\exists f'(0) = 1 > 0$

per $x>0$

$$1 = \frac{x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{x^2+x}{x} \longrightarrow 1$$

per $x<0$

$$1 \ge \frac{f(x)}{x} \ge \frac{x^2+x}{x} \longrightarrow 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+1\right)+x \\ 0 \quad x=0 \end{cases}$$

per $x \neq 0$ $f'(x) = x\left(\sin\frac{1}{x^2}+1\right) - \frac{1}{x}\cos\cancel{x}\,\frac{1}{x^2} + 1$

cambia segno in infiniti intervalli che si accumulano in 0! ed è continua

NOTA

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(\sin\frac{1}{x^2}+1\right)+x & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

è derivabile in 0 con derivata $=1$

$$f(x) = x + o(x) \qquad x^2 \cdot \text{LIMITATA}$$

$x=0$

$$f(x) = f(x_0) + \underline{f'(x_0)}(x-x_0) + o(x-x_0)$$

NOTA PER $x \neq 0$

$f'(x)$ NON HA LIMITE !!

$$0 \leftarrow \lim_{x\to 0} x\Big(\underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\text{LIMITATA}}+1\Big) \quad \boxed{-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}} + 1$$

$\frac{1}{x_k^2} = 2k\pi \qquad \frac{1}{x_k^2} = (2k+1)\pi$

$x_k = \frac{1}{\sqrt{2k\pi}} \qquad \tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi}}$

$\boxed{\text{Prop}}$: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$ e continua in I.

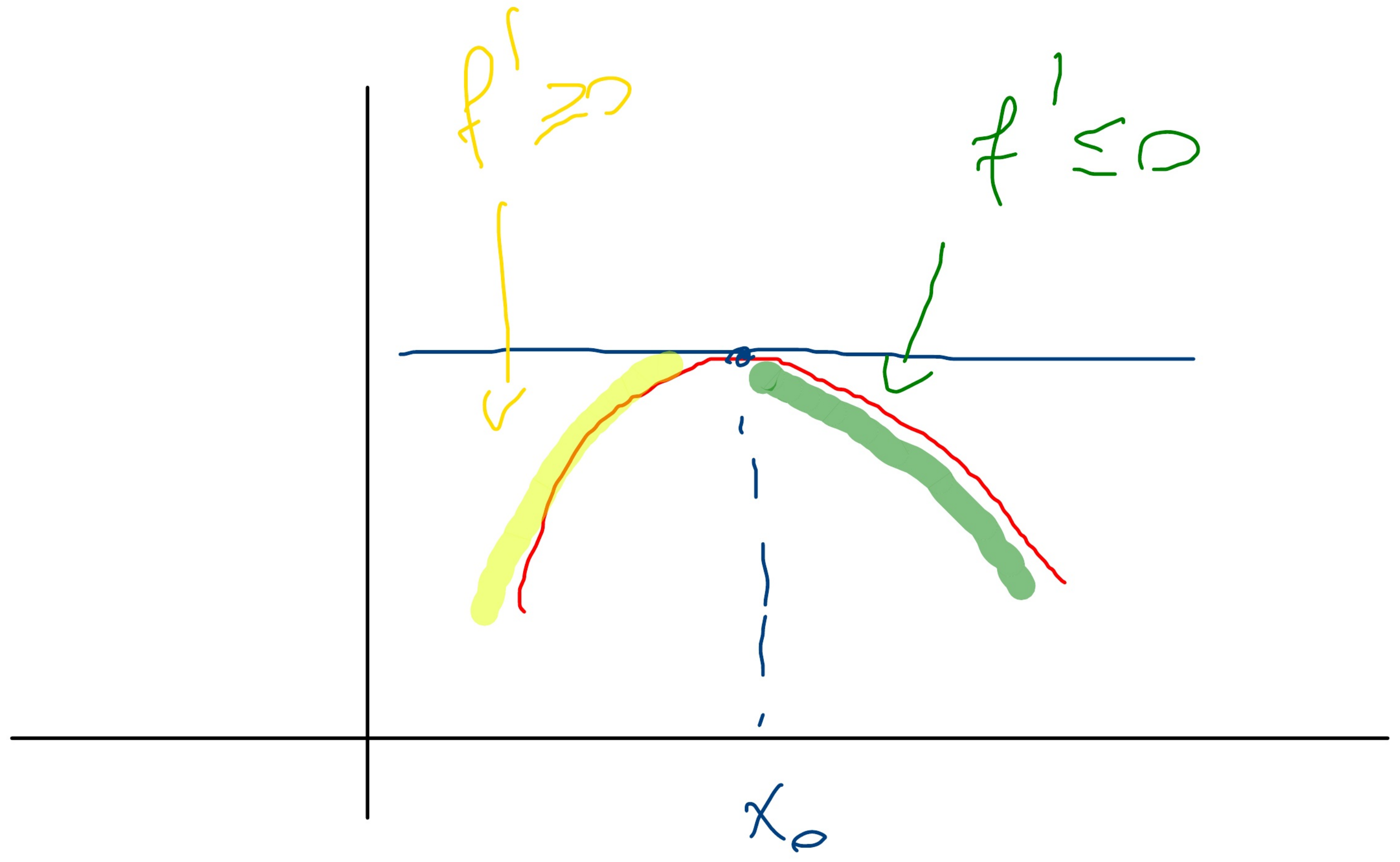
Valgono:

f' non è necessariamente definita in x_0

1) Se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0 allora x_0 è punto di minimo locale per f.

2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0 $\Rightarrow$ x_0 è punto di max locale per f.

Interessa il segno della derivata per i pti di max e min relativo



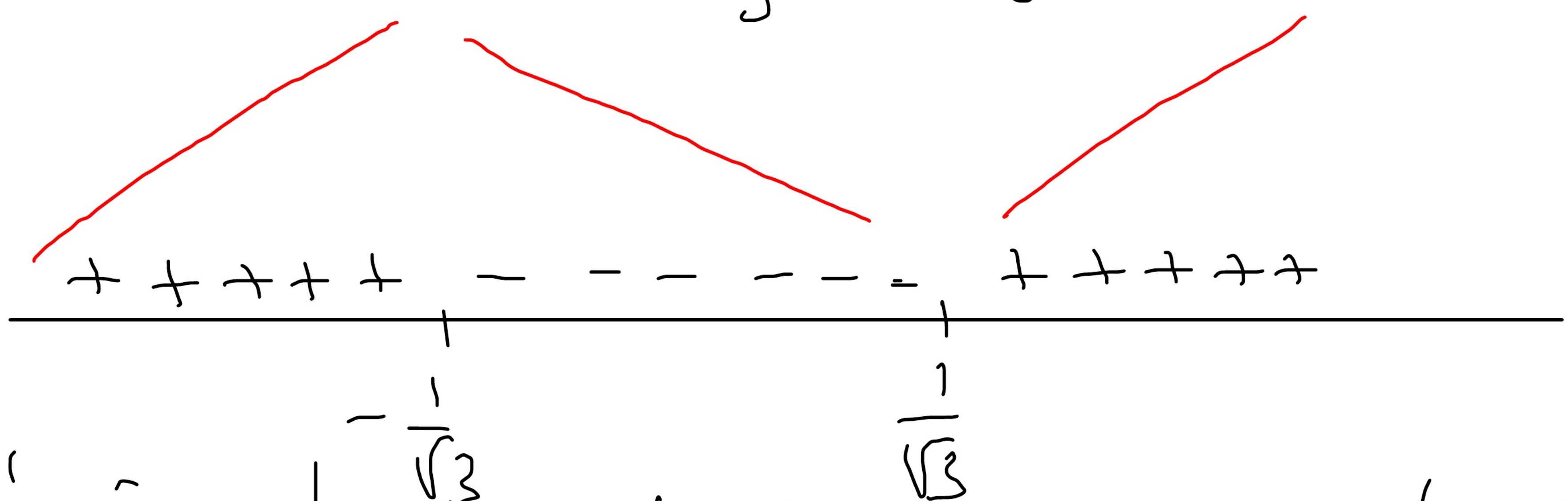
$f' \geq 0$
$f' \leq 0$
x_0

Es: $f(x) = x^3 - x \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

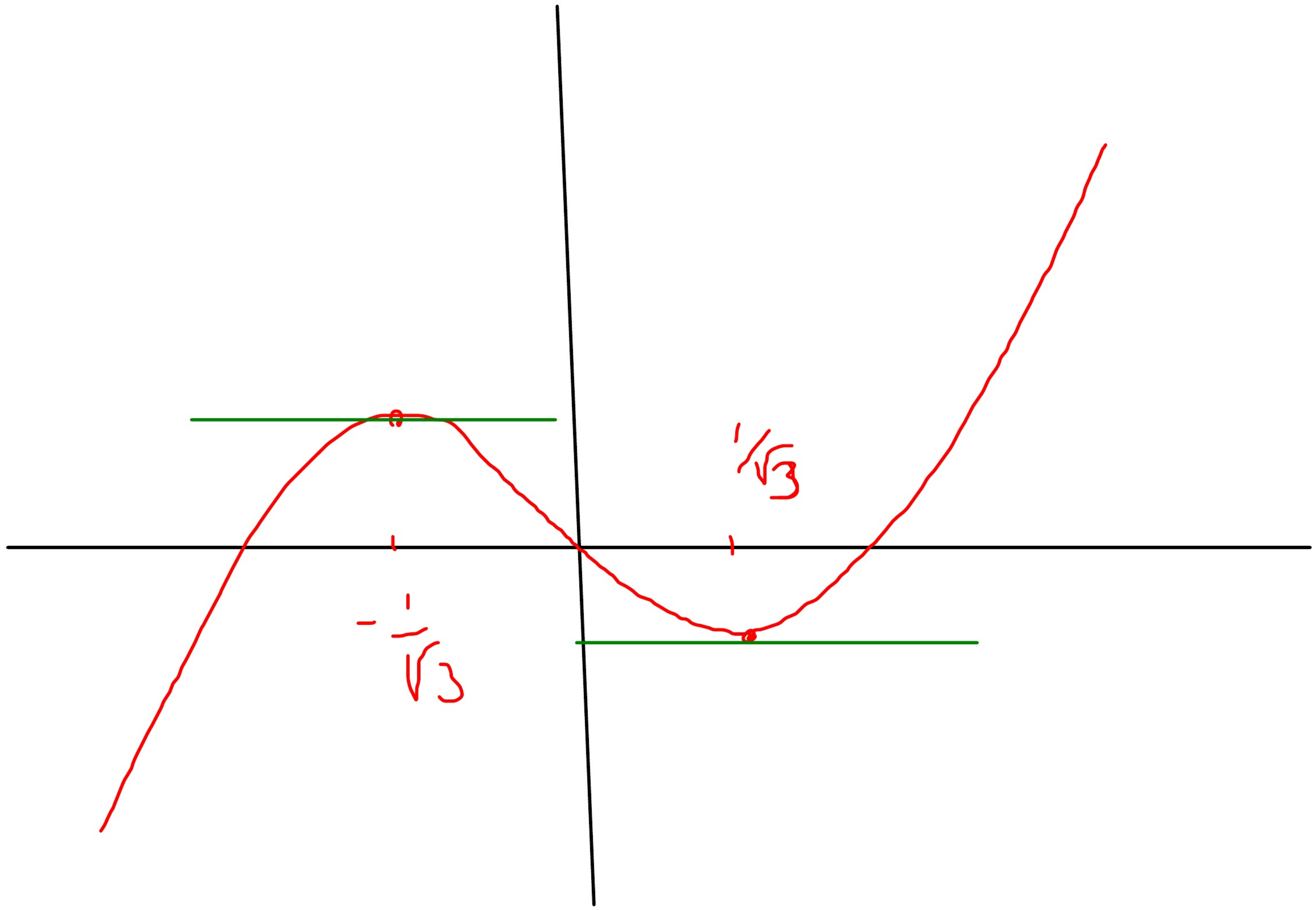
$f'(x) = 3x^2 - 1$ studiamo il segno di f'.

$$3x^2 - 1 \geq 0 \iff 3x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{3} \iff |x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

cioè $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.



$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di max locale, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ è di min. locale.

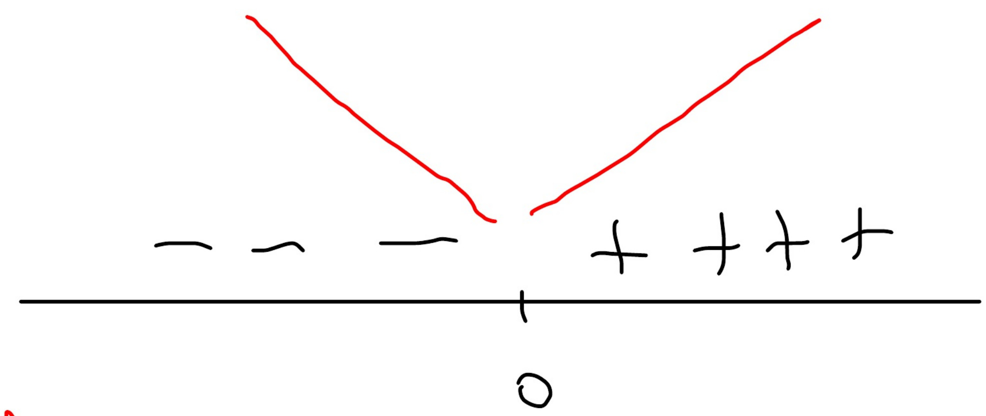


1/√3
-1/√3

Cosa succede nel caso f non sia derivabile in x_0

Es: $f(x) = |x|$ f non è derivabile in $x_0 = 0$

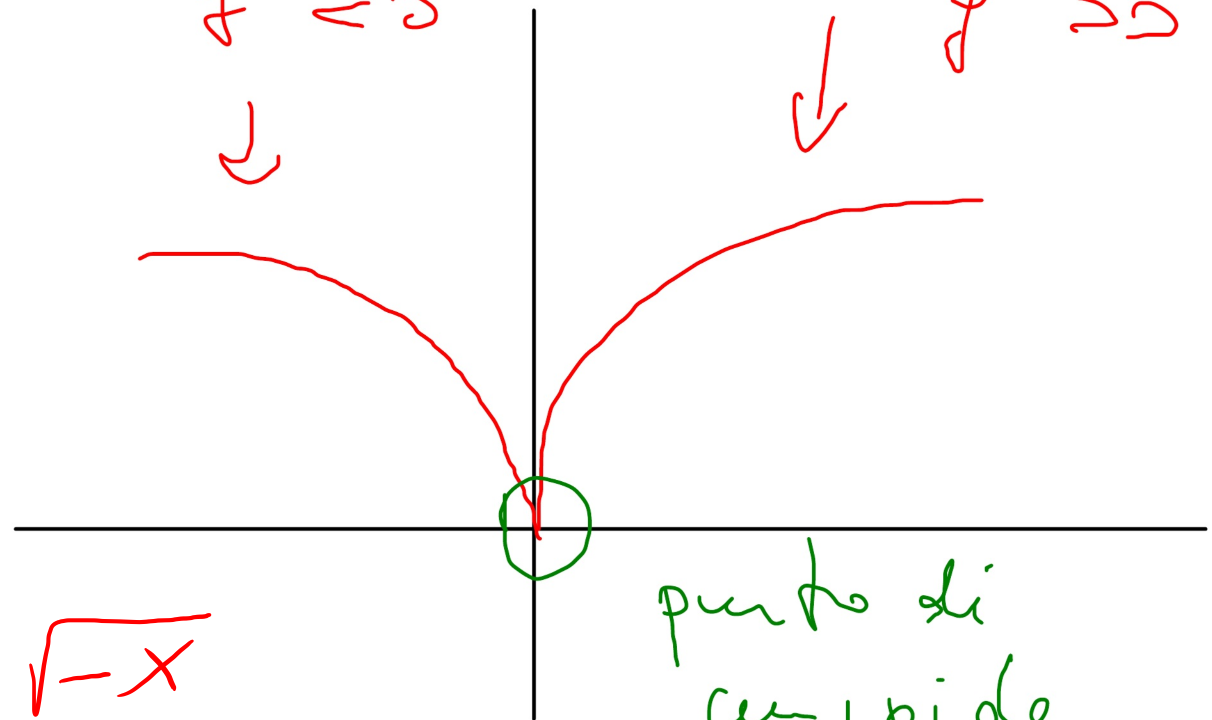
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$x_0 = 0$ è punto di minimo.

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$

$f' < 0$ $f' > 0$.



f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

punto di cuspide ma è anche punto di minimo.

$x < 0$ $f(x) = \sqrt{-x}$

$f'(x) = -1 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-x}} < 0$

NOTA questo è un esempio

è ovvio che 0 è minimo $f(0) = 0$

$f \geq 0$

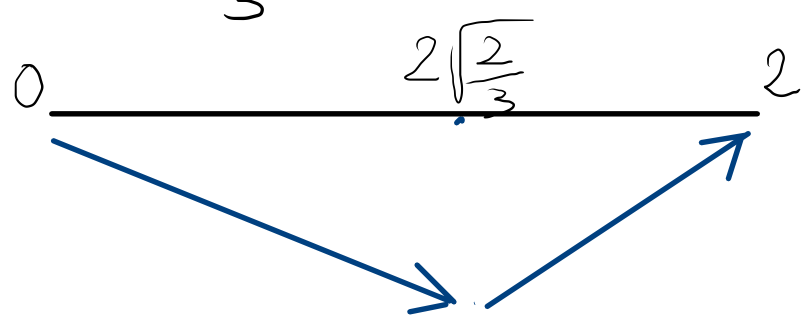
Es. $f:[0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3 - 8x$

trovare i punti di minimo locale e massimo locale.

· Segno f' per l'andamento del grafico

$$f'(x) = 3x^2 - 8 > 0 \iff x^2 > \frac{8}{3} \overset{x \geq 0}{\iff} x > 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Essendo $\alpha\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} < 2$



non è il grafico ma l'andamento

0 e 2 sono punti di massimo locale

$2\sqrt{\frac{2}{3}}$ è punto di minimo (assoluto) e quindi locale

chi sono i pti di max assoluto: $f(0) = 0 < f(2) = 8^3 - 8^2$,

2 è pto di max ass.!

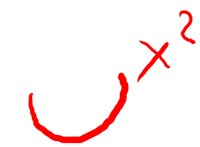
CONDIZIONI DIFFERENZIALI AL SECONDO ORDINE MAX E MIN LOCA

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$

f ① derivabile 2 volte in x_0 e ② $f'(x_0) = 0$.

VUOL DIRE DERIVABILE in un intorno di x_0 e $\exists\, (f')'(x_0)$

Allora valgono:



1) Se x_0 è punto di minimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$
2) Se x_0 è punto di max locale $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

necess.

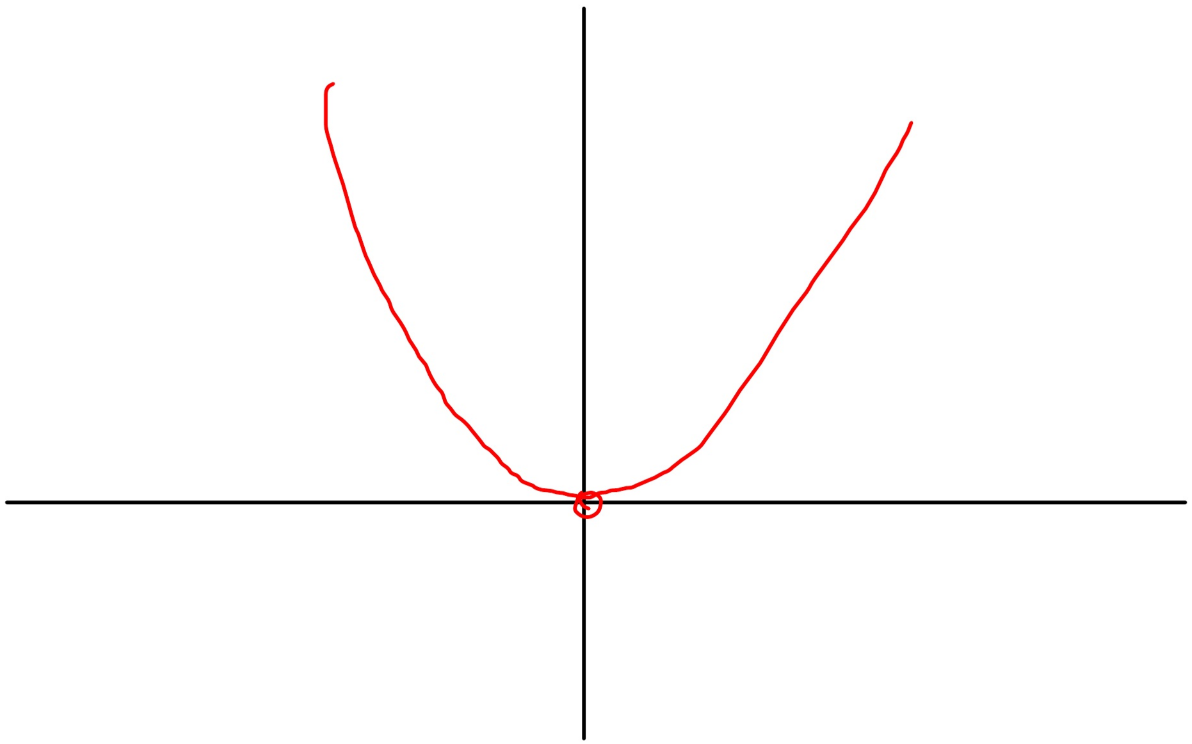
3) Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è punto di minimo locale
4) Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è punto di max locale

suffic.

cfr. Lemma

<u>Es</u>: $f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2 > 0$ sempre

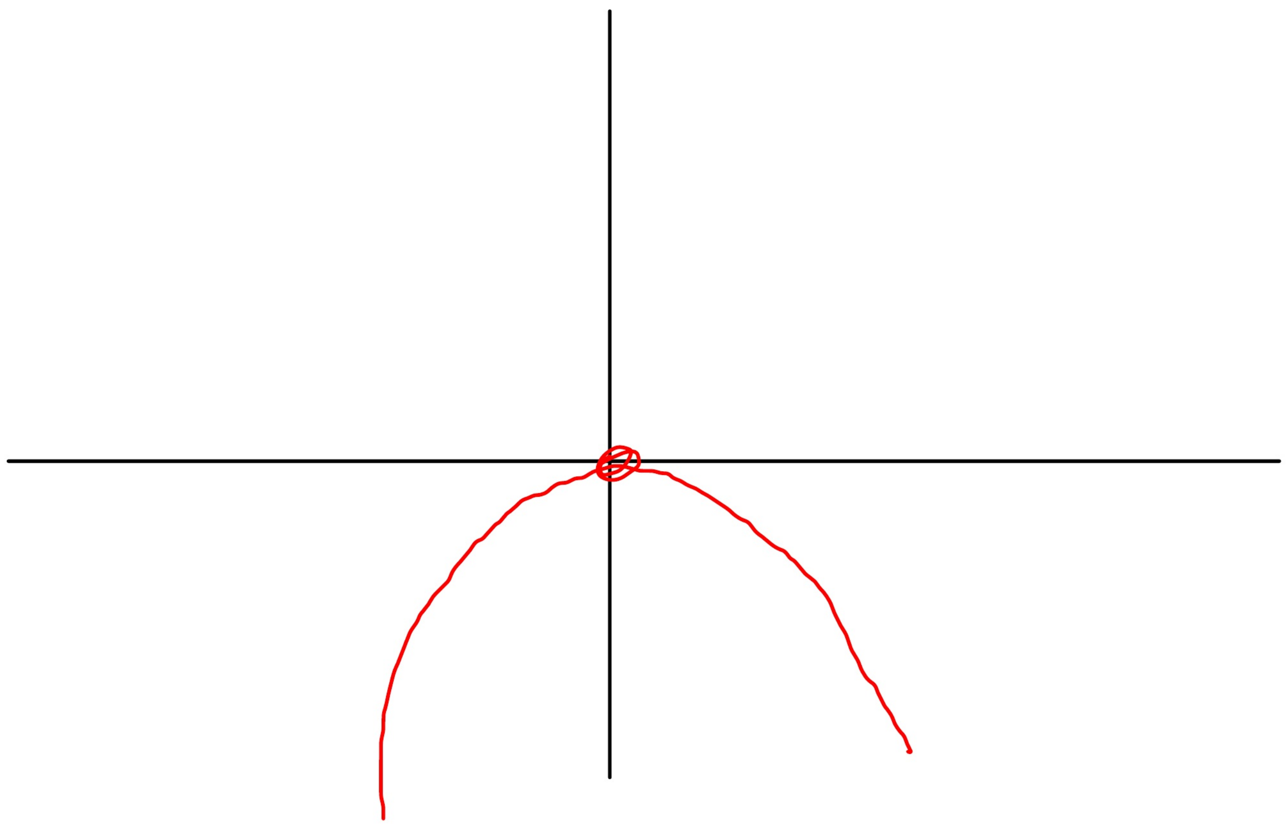
$f'(0) = 0$, $f''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ è punto di minimo locale.



Es: $g(x) = -x^2$ $\quad g'(x) = -2x$ $\quad g''(x) = -2$

$g'(0) = 0$ $\quad g''(0) = -2 < 0$

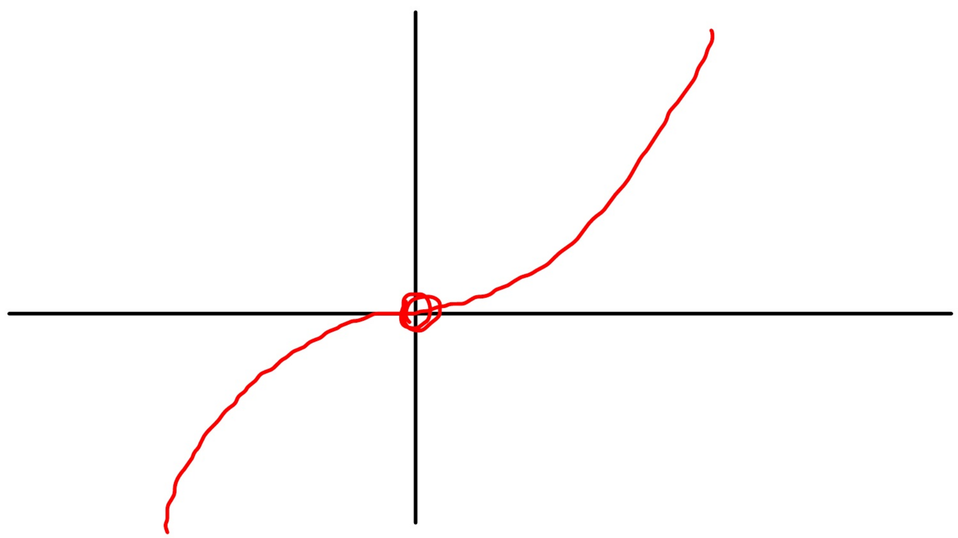
$\Rightarrow x_0 = 0$ è punto di max locale



Es: se $f''(x_0)=0$ non posso affermare niente. Infatti consideriamo

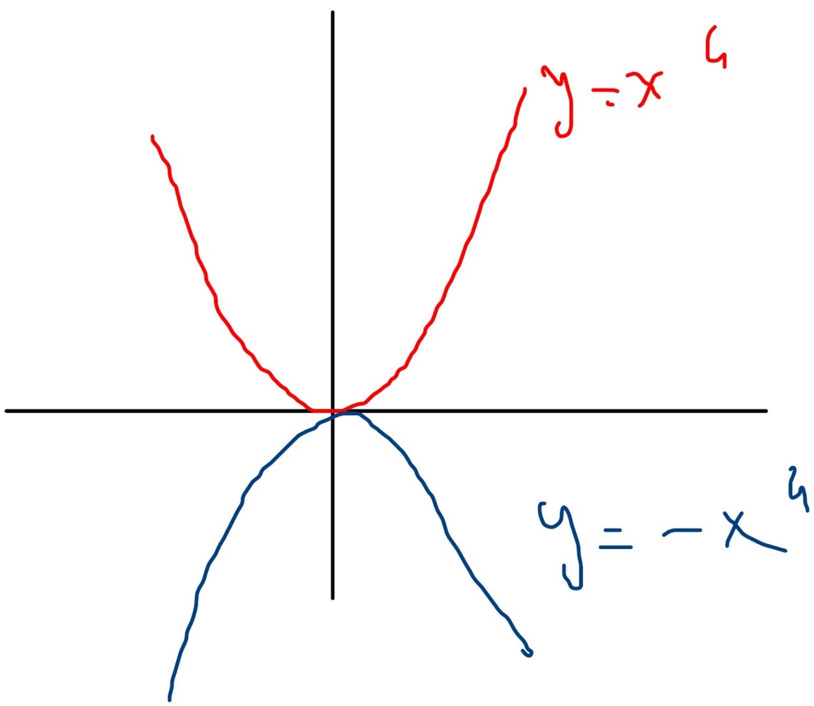
$h(x)=x^3$ $\quad h'(x)=3x^2$, $h''(x)=6x$

$h'(0)=0$, $h''(0)=0$ ma $x_0=0$ non è né punto di max né di minimo locale.



Es: $f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ e in questo caso $x_0 = 0$ è punto di minimo



$g(x) = -x^4 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = 0$

ma $x_0 = 0$ è punto di massimo

Teorema di de l'Hôpital

Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b). Se valgono le seguenti condizioni

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ oppure

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a $(x \neq a)$

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Downarrow$

$$\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Stesso risultato per $x \to b^-$.

<u>Oss</u>: funziona anche nel caso di x_0 interno all'intervallo perché basta fare i due limiti destro e sinistro. $(a, b) \setminus \{x_0\}$ (a, x_0), (x_0, b)

Esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{0}{0}$

$f(x) = 2\cos x - 2 + x^2$ $\qquad g(x) = x^4$.

$f'(x) = -2\sin x + 2x$ $\qquad g'(x) = 4x^3$

provo a fare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

applicare di nuovo de l'Hôpital

derivo di nuovo e provo a calcolare

$$\frac{-2\cos x + 2}{12x^2} \qquad \frac{2\sin x}{24x} \longrightarrow \frac{1}{12}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}$$

derivo ancora

$$\lim_{x\to 0} \frac{+2\sin x}{24x} = \frac{1}{12} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{12} \cdot 1 = \frac{1}{12}$$

applicando 3 volte il th. di de l'Hôpital ho che

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}.$$

$$2\,\frac{(1-\cos x)}{12x^2} = \frac{2}{12}\,\frac{1-\cos x}{x^2} \longrightarrow \frac{1}{12}$$

Es:

$$\lim_{x\to\infty} \boxed{\frac{e^x}{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

de l'Hôpital derivando num. e denom.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

derivo di nuovo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty .$$

<u>Oss</u>: Verificare sempre l'ipotesi 1) cioè di essere in una forma indeterminata.

<u>Es</u>: $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

se non mi accorgo che l'ipotesi 1) non vale e applico de l'Hôpital (sbagliando).

derivo

$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{sbagliato}}$

Oss: potrebbe non esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ma esistere il $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Es: $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $\quad g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\boxed{x^2} \cdot \boxed{\sin\frac{1}{x}}}{x} = \frac{0}{0}$$

limitata

applico de l'Hôpital e derivo

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) =$$

$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\boxed{2x\sin\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}}{1}$$

$\to 0 \cdot \text{limitata} = 0$

non esiste

= non esiste

ma invece $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\sin\frac{1}{x}}{\cancel{x}} = 0 \cdot \text{limitata} = 0$

quindi in questo caso $\exists \lim \frac{f(x)}{g(x)}$

ma $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Sarebbe quindi sbagliato concludere che

se $\nexists \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \nexists$ neanche $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$.

Oss: Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (finito)

e $\nexists \lim_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x)$.

dim: per assurdo se $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = m$

allora $g(x) = \underbrace{(f+g)(x)}_{\downarrow \, m} - \underbrace{f(x)}_{\downarrow \, \ell} \longrightarrow m - \ell$

assurdo perché $\nexists \lim_{x \to x_0} g(x)$.

Corollario: Se f è **continua in x_0** e derivabile in un intorno di x_0 (eccetto al più in x_0) e se esiste

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora $\exists\, f'(x_0) = \ell \in \mathbb{R}$

NON È VERO IL VICEVERSA

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x) \Rightarrow \exists\, f'(0) = 0 \qquad \nexists \lim_{x \to 0} f'$$

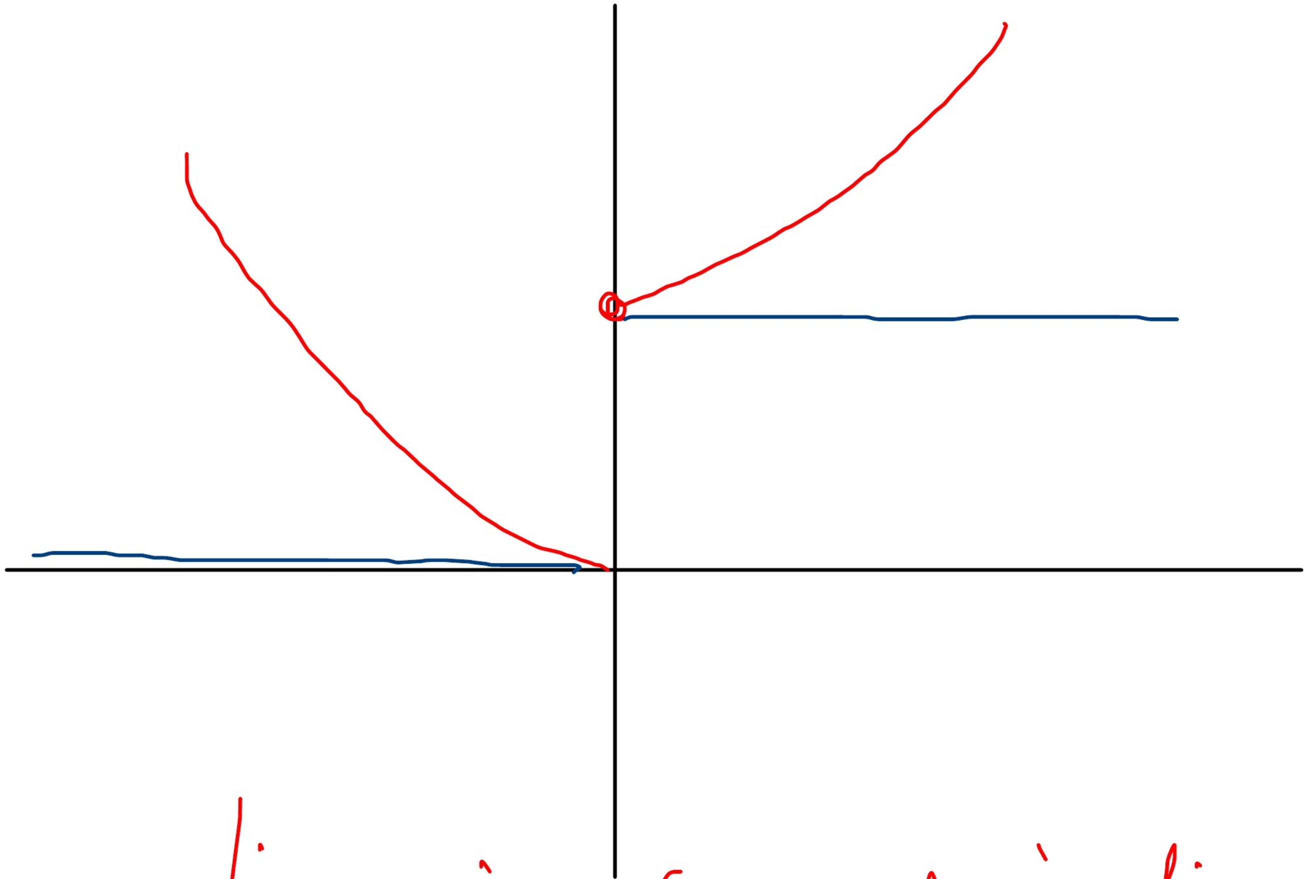
Es:
$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f è derivabile in $x_0 = 0$?

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

quindi? è derivabile? NO



f non è continua in $x_0 = 0$ quindi non è derivabile.

Oss: Se $\nexists \lim_{x \to x_0} f'(x)$ non è detto che f non sia derivabile in x_0.

Es: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

è continua in $x_0 = 0$ perché

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \cdot \text{limitata} = 0 = f(0)$$

è derivabile?

1) provo a calcolare il limite della derivata

Se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 0 - \nexists \Rightarrow \nexists$

non esiste il limite di $f'(x)$

Da questo non posso concludere che f non è derivabile in $x_0 = 0$.

2) Faccio il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}} =$$

$f(0)$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 .$$

$\Rightarrow f$ è derivabile e $\underline{\underline{f'(0) = 0}}$.

$$f(x) = o(x)$$

$$\frac{f(x)}{x} = o(1)$$

$x^2 \sin \frac{1}{x} = x^2 \cdot$ LIMITATA

Esempi di de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \boxed{\frac{e^{-1/x}}{x^2}} = \frac{e^{-\frac{1}{0^+}}}{0^+} = \frac{e^{-\infty}}{0^+} = \frac{0^+}{0^+}$$

derivo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \boxed{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^3}}$$

è peggio di prima.

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty} \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$$

de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}}$$

$$D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D\left(x^{-2}\right) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

derivo $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{x^3}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{e^{1/x}\cdot x^3} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{e^{1/x}}$$

è migliorato.

è ancora indeterminato $\frac{\infty}{\infty}$

de l'Hôpital di nuovo. Derivo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\cancel{\frac{2}{x^2}}}{e^{1/x}\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{1/x}} = \frac{2}{\infty} = 0 .$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$$