Esercitazione 5, 02/11/2020

Esercizio 6: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

(a) ha asintoto obliquo (b) è concava

(c) non ha punti di minimo locale (d) è debolmente cresc.

(a)? L'unico asintoto obliquo (se c'è) sarà a $+\infty$.

Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\frac{(+\infty)\cdot\log(1+0)}{+\infty}=\frac{+\infty\cdot 0}{+\infty}$$

f. indeterminata.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}}=(1+0)\cdot\log(1)=0.$$

Segue che non c'è un asintoto obliquo, ma c'è piuttosto un asintoto orizzontale (l'asse x).

Le altre domande si studiano tutte usando $f'(x)$.

$$f'(x)=\frac{\left(1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+(x+1)\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)x-(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}=$$

$$=\frac{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cancel{(x+1)}\cdot\frac{1}{\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)\cdot\cancel{x}-(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}=$$

$$= \frac{\cancel{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1 - \cancel{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{-1-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

risolviamo $-1-\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq 0$: (il denom. x^2 e' sempre ≥ 0)

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq -1$$

$$\Updownarrow$$

$$1+\frac{1}{x} \leq e^{-1} = \frac{1}{e} \iff \frac{1}{x} \leq \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e}$$

(visto che $x>0$)

$$x \leq \frac{1}{\frac{1-e}{e}} \iff \left(\frac{1-e}{e}\right)x \geq 1$$

$\left(\frac{1-e}{e}\right) < 0$!

Visto che $\frac{1}{\frac{1-e}{e}} < 0$, non ci sono $x>0$ che soddisfano $f'(x) \geq 0$.

Segue che $f'(x) < 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e' str. decrescente

Dunque in particolare f non ha punti di minimo locale. Quindi la risposta è (c).

<u>Esercizio 8</u> : polinomio di Taylor di ordine 3

in $x_0 = 0$ di $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

2 possibilità : - usare la formula generale

$$P_n(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

(in $x_0 = 0$)

Basta calcolare $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$.

- usare gli sviluppi di Taylor "noti".

Usiamo il secondo metodo.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}.$$

Usiamo lo sviluppo di $(x+1)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ centrato in $x_0 = 0$

$$(x+1)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} \cdot x + \binom{\alpha}{2} \cdot x^2 + \binom{\alpha}{3} \cdot x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{k} \cdot x^k + o(x^k)$$

(pol. di Taylor di ordine k).

dove $\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - i + 1)}{i!}$

Usiamo questo sviluppo con $\alpha = -1$, e $k = 3$.

$$(x+1)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}\cdot x + \binom{-1}{2}\cdot x^2 + \binom{-1}{3}\cdot x^3 + o(x^3)$$

$$\binom{-1}{1} = \frac{(-1)}{1!} = -1 \quad , \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1$$

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!} = -1$$

Quindi il poli di ordine 3 e'

$$1 - x + x^2 - x^3 .$$

<u>Esercizio</u>: calcolate lo sviluppo di Taylor di $\log(1+\sin(x))$ in $x_0=0$ di ordine 2.

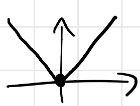
(anche questo si può fare con entrambi i metodi)

<u>Esercizio 9</u>: $f(x) = |x| \cdot \sin x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f è continua e/o derivabile in $x_0 = 0$?

Per prima cosa f è continua su tutto $\mathbb{R}$, in quanto prodotto di $|x|$ e $\sin x$, che sono continue su tutto $\mathbb{R}$.

Potrebbe non essere derivabile in $x_0=0$, a causa del fattore $|x|$.



Controlliamo se è derivabile o meno.

Proviamo a calcolare $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$, vediamo se esistono questi limiti e se sono uguali o meno.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|\sin h - |0|\cdot\sin(0)}{h}$$

$(x_0=0)$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h\cdot\sin h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sin h = 0.$$

$|h|=h$ perché $h\to 0^+$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|\sin h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h\sin h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-\sin h) = 0$$

$|h|=-h$ perché $h\to 0^-$

Quindi $f'_+(0)$, $f'_-(0)$ esistono in $\mathbb{R}$ e sono uguali. Concludo $f(x)$ è derivabile in $x_0=0$ e $f'(0)=0$.

(risposta (d))

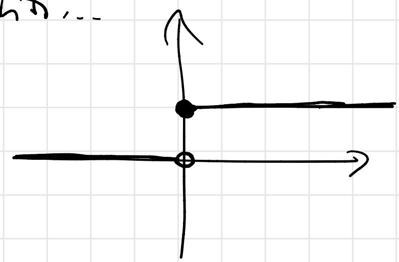
Domanda: è sufficiente scrivere $f(x)$ per $x\geq 0$ e $x<0$ e derivare la formula in questi due casi?

In questo caso sì, porta al risultato giusto perché f è continua in 0.

In generale è meglio stare attenti...

<u>Esempio</u>:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



f è derivabile in 0?

Risposta: NO! Perché non è continua (ad esempio)

Se però guardo a $x \geq 0$ vedo $f(x) = 1$

e

$x < 0$ vedo $f(x) = 0$

e facendo le derivate delle due funzioni in $x=0$ trovo 0 in entrambi i casi

(il problema è che 0 non sta in $(-\infty, 0)$ ...)

<u>Oss</u>: la derivata di $f(x)$ ha senso soltanto nei punti <u>interni</u> del dominio di f.

quelli che hanno tutto un intervallino aperto attorno, contenuto nel dominio.

Nei punti "di bordo" (ad es: 0 in $[0, +\infty)$)
1 in $[0, 1]$

ha senso solo la derivata destra o

sinistra, a seconda ...

Esercizio : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(la derivata $f'(x)$ non è continua in 0)

è continua e derivabile in 0

calcolate il limite del rapporto incrementale

ma $\underbrace{\lim_{x \to 0^+} f'(x)}$ non esiste.

attenzione: questa non è la derivata destra di f in 0!!

Quindi se cerco di capire se $f(x)$ è derivabile in $x_0 = 0$ restringendomi a $x > 0$ e $x < 0$, sembra che non sia derivabile, ma in realtà lo è!

Esercizio 3 : $f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \cdot \log|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$f(x)$ è continua e/o derivabile in 0 ?

Vediamo se è continua in 0 :

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\frac{3}{2}} \log|x|.$$

Distinguiamo $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^{\frac{3}{2}} \cdot \log x = 0 \cdot (-\infty)$$

possiamo dire che è $=0$

usando il limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \log(x) = 0$ $\quad \alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x)^{\frac{3}{2}} \log(-x)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} (t)^{\frac{3}{2}} \cdot \log(t) = 0 \text{ come sopra.}$$

ponendo $t=-x$

ho $t \to 0^+$

Quindi f è continua in 0.

Per vedere se è derivabile, come nell'esercizio precedente calcoliamo $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\frac{3}{2}} \log|h| - 0}{h}$$

Anche qui si calcolano il limite destro e sinistro, cioè la derivata destra e sinistra, e si controlla (se esistono) se sono uguali:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|^{\frac{3}{2}} \log|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\frac{3}{2}} \log h}{h} = \lim_{h\to 0^+} h^{\frac{1}{2}} \log h = 0$$

per il limite notevole di sopra.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|^{\frac{3}{2}}\log|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(-h)^{\frac{3}{2}}\log(-h)}{h} =$$

pongo $t=-h$, che tende a 0^+

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{\frac{3}{2}}\log(t)}{-t} =$$

$$= -\underbrace{\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2}}\log(t)}_{\text{stesso limite di prima.}} = -0 = 0$$

Quindi $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$

quindi $f(x)$ e' derivabile in $x_0=0$, e $f'(0)=0$.

(risposta (b)).

<u>Domanda</u>: $o(x+o(x^2)) = o(x)$? (per $x\to 0$)

Si': $o(x+o(x^2)) = o(x) + o(o(x^2))$

$$= o(x) + o(x^2)$$

$$= o(x)$$ (perche' $o(x^2)$ e' $o(x)$ ma non viceversa!)

<u>Esercizio 4</u>: il limite

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(1+\sin x)}{1+\sin x - e^x} = \frac{\log(1)}{1+0-1} = \frac{0}{0}$$

f. indetermin.

Usiamo gli sviluppi di Taylor:

proviamo a ordine 1.

$$\log(1+t) \underset{t\to 0}{=} t+o(t), \qquad \sin x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)$$

$$e^x = 1+x+o(x)$$

Segue $\log(1+\sin x) \underset{\uparrow}{=} \sin x + o(\sin x)$

$t=\sin x$

lecito perché $\sin x \to 0$ quando $x\to 0^-$

$$= x+o(x)+o(x+o(x))$$

$$= x+o(x)+o(x)+\overbrace{o(o(x))}^{=o(x)}$$

$$= x+o(x)$$

Per il denominatore,

$$1+\sin x - e^x = 1+(x+o(x))-(1+x+o(x)) =$$

$$= \cancel{1}+\cancel{x}+o(x)-\cancel{1}-\cancel{x}-o(x) = o(x)-o(x) = o(x).$$

Quindi trovo $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x+o(x)}{o(x)} = ??$

$$\frac{x+o(x)}{o(x)} = \frac{\cancel{x}\left(1+\overbrace{\frac{o(x)}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0}\right)} \longrightarrow \frac{1+0}{0}$$

~ probabilmente verrà $\pm\infty$ ma non so dire quale!!

Per capire il segno del denominatore, aumentiamo la precisione nello sviluppo.

Proviamo a sviluppare il denominatore a ordine 2.

$$\sin(x) = x + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi $1 + \sin x - e^x = 1 + x + o(x^2) - 1 - x - \frac{x^2}{2} - o(x^2)$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ora trovo $\dfrac{\log(1+\sin(x))}{1+\sin x - e^x} = \dfrac{x + o(x)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$

$$= \frac{\cancel{x}\left(1 + \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow{x \to 0^-} \frac{1}{0^- \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi il limite è $+\infty$.

(risposta (b))

Esercizio 7 : derivata di $f(x) = (\log x)^{\sin x}$.

Passare alla forma esponenziale : $(h(x))^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \log(h(x))}$

Quindi $f(x) = (\log(x))^{\sin x} = e^{\sin(x) \cdot \log(\log(x))}$

$$f'(x) = e^{\sin(x) \cdot \log(\log(x))} \cdot \left(\sin(x) \log(\log(x))\right)'$$

$$= (\log x)^{\sin x} \cdot \left(\cos(x) \cdot \log(\log(x)) + \sin(x) \cdot \frac{1}{\log(x)} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

(risposta (b))

$$\left(f(x)^{g(x)} \right)' = \left(e^{g(x) \log(f(x))} \right)' = e^{g(x) \log(f(x))} \cdot \left(g'(x) \cdot \ldots \right.$$