Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile.

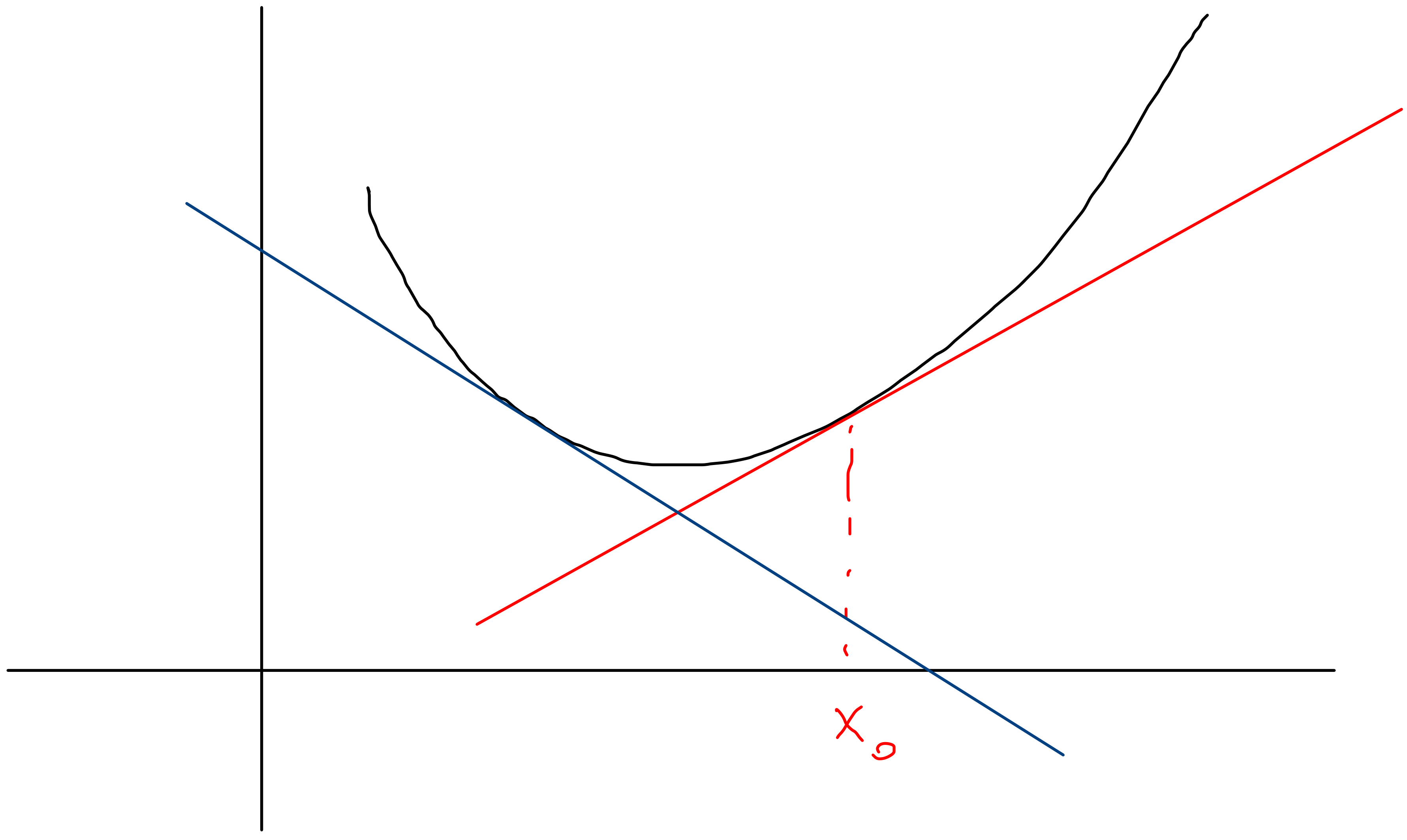
Allora f è convessa in I se e solo se $\forall x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$. Cioè, $\forall x_0, x \in I$

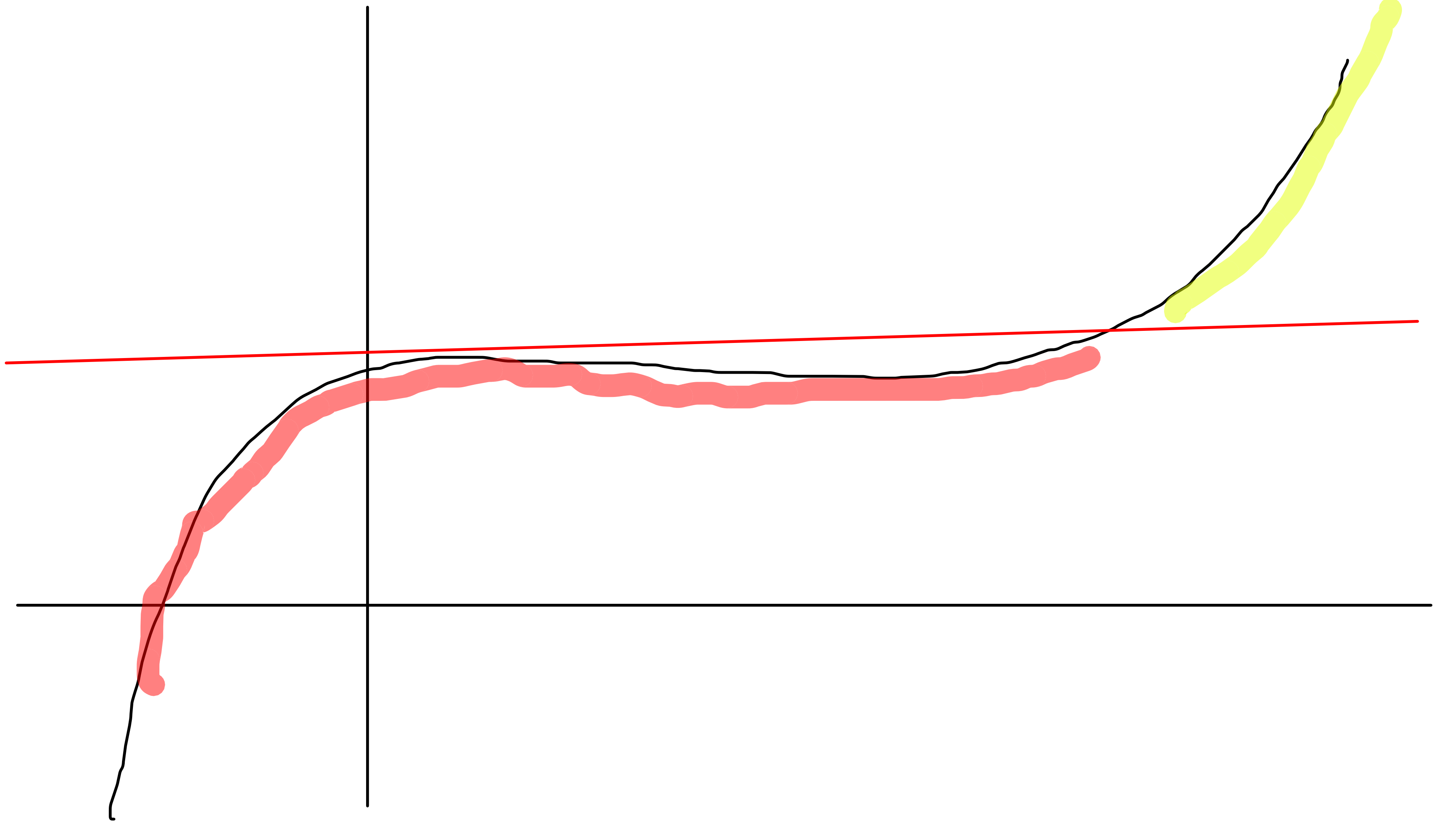
$$f(x) \geq \boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

retta tangente

Concava se vale il $\leq$

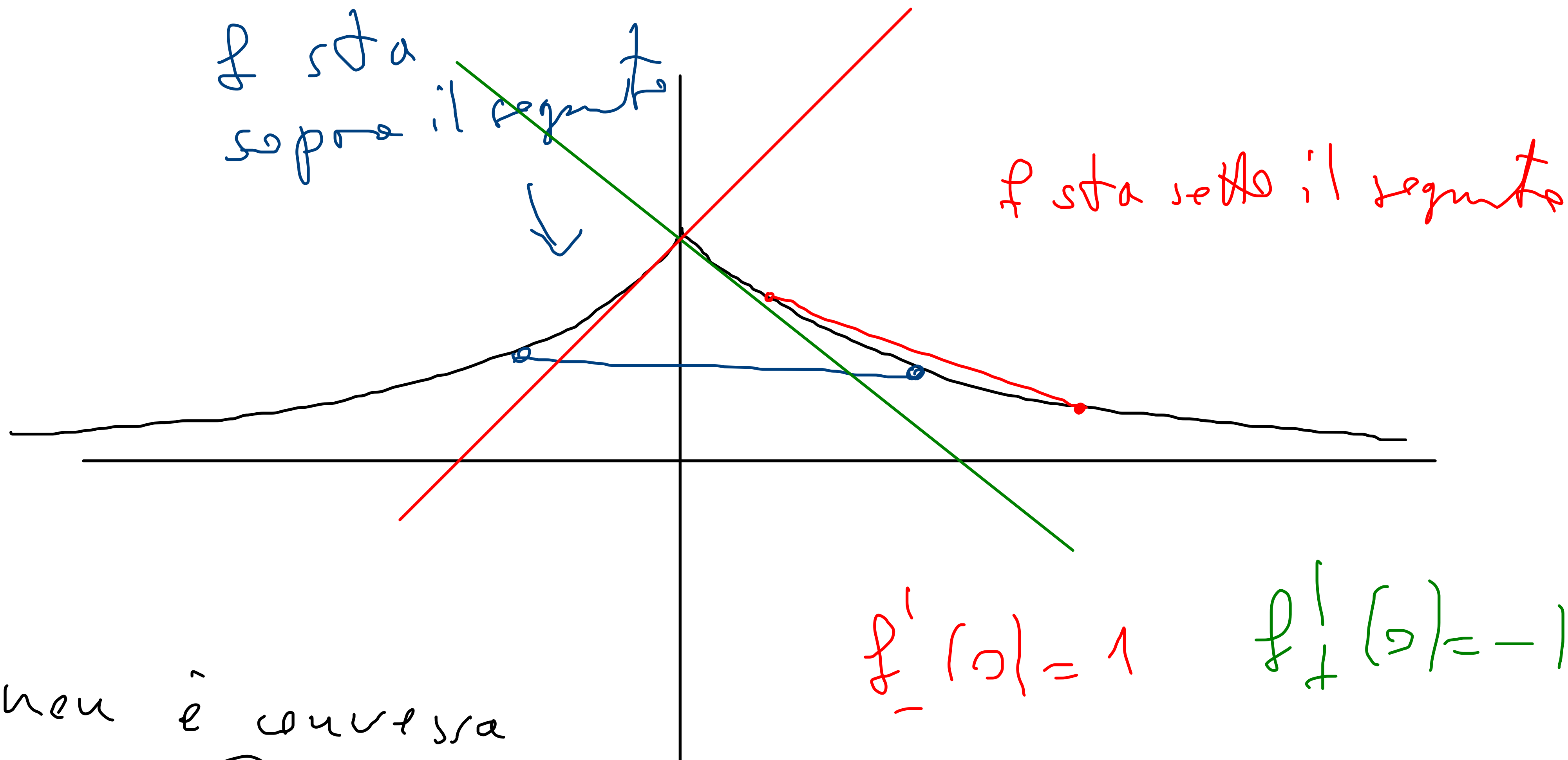
Strett. convessa se vale $>$ con $x \neq x_0$.


x_0



Es: $f(x) = e^{-|x|}$ pari

$f(x) = e^{-x}$ se $x \geq 0$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



f non è convessa in $\mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se $x > 0$ $\quad f'(x) = -e^{-x} \quad f''(x) = e^{-x} > 0$

$\Rightarrow$ f è convessa sull'insieme $\{x \geq 0\}$.

Se $x < 0$ $\quad f'(x) = e^{x} \quad f''(x) = e^{x} > 0$

$\Rightarrow$ f è convessa sull'insieme $\{x \leq 0\}$

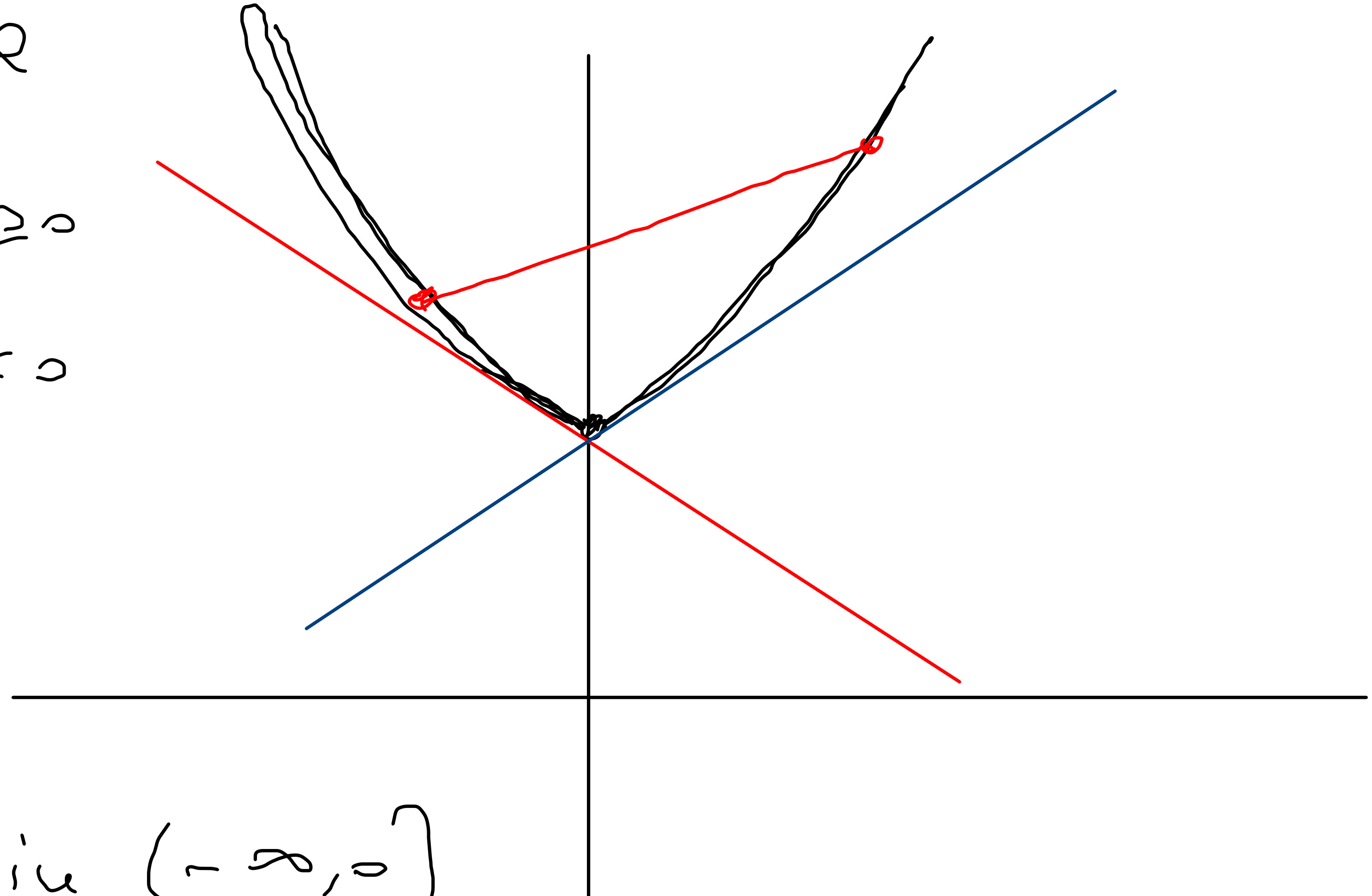
Ma f non è convessa in $\mathbb{R}$

Es: $f(x) = e^{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f'_-(0) = -1$

$f'_+(0) = 1$



f è convessa in $(-\infty, 0]$

f è convessa in $[0, +\infty)$

e in questo caso f è convessa in $\mathbb{R}$.

Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno di I, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $I \setminus \{x_0\}$.

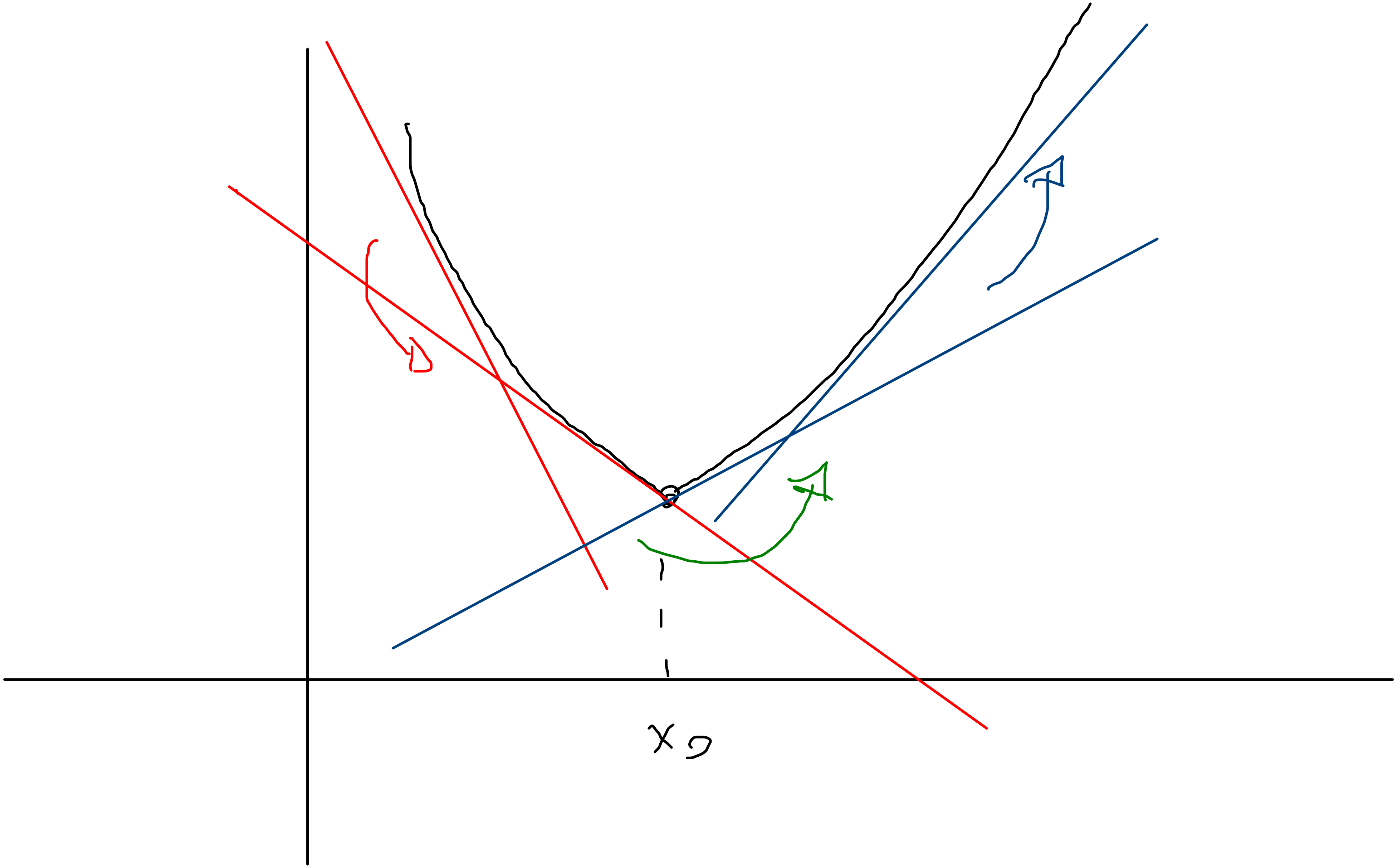
Siano $I_1 = \{x \in I \text{ t.c. } x < x_0\}$

$I_2 = \{x \in I : x > x_0\}$.

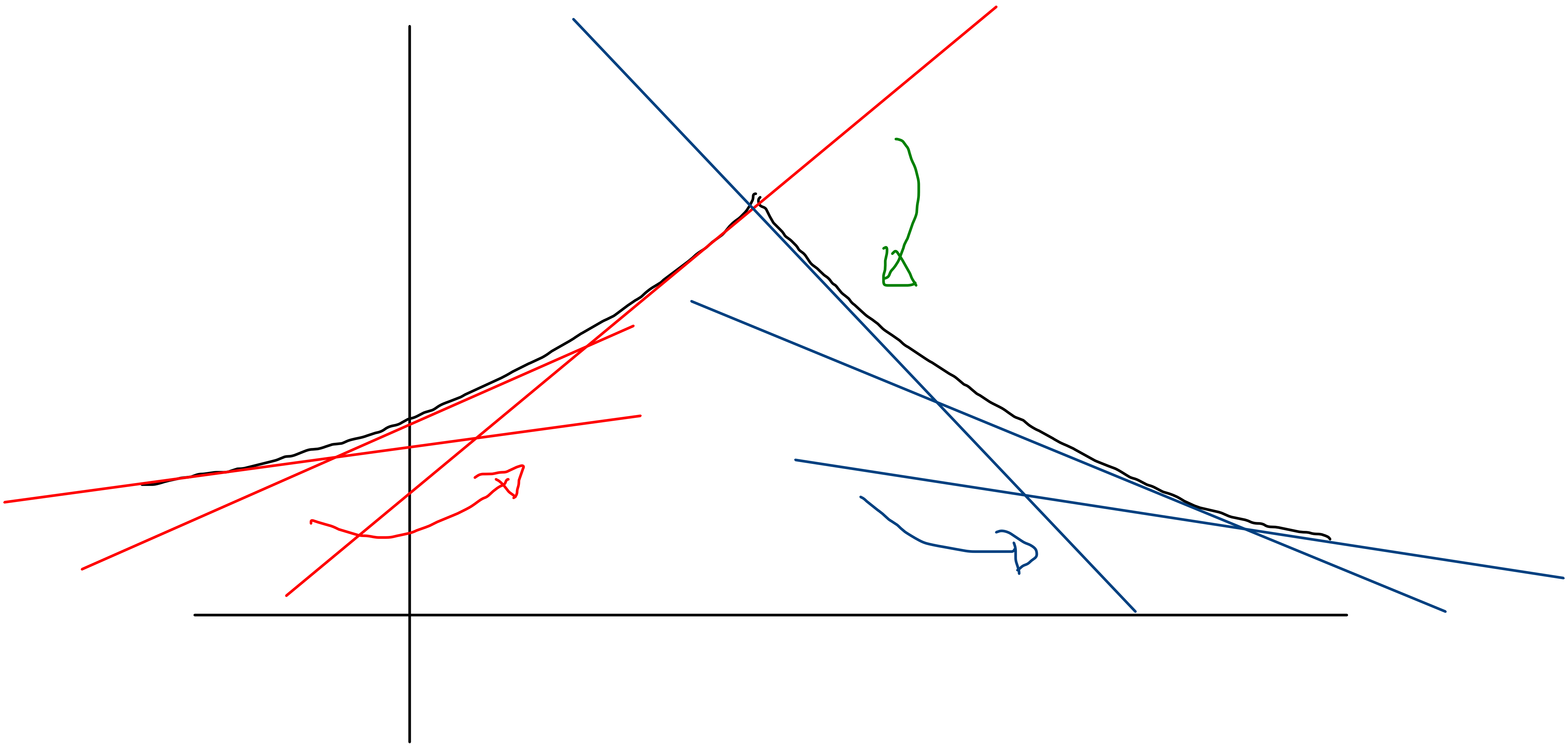
Se f è convessa in I_1 e I_2 e x_0 è un punto angoloso per f allora f è convessa in I

se e solo se

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$



x_0



Flessi.

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.
x_0 punto interno ad I si dice punto di flesso se f è derivabile in x_0 e esiste un intorno V di x_0 ($V \subset I$) t.c. la quantità

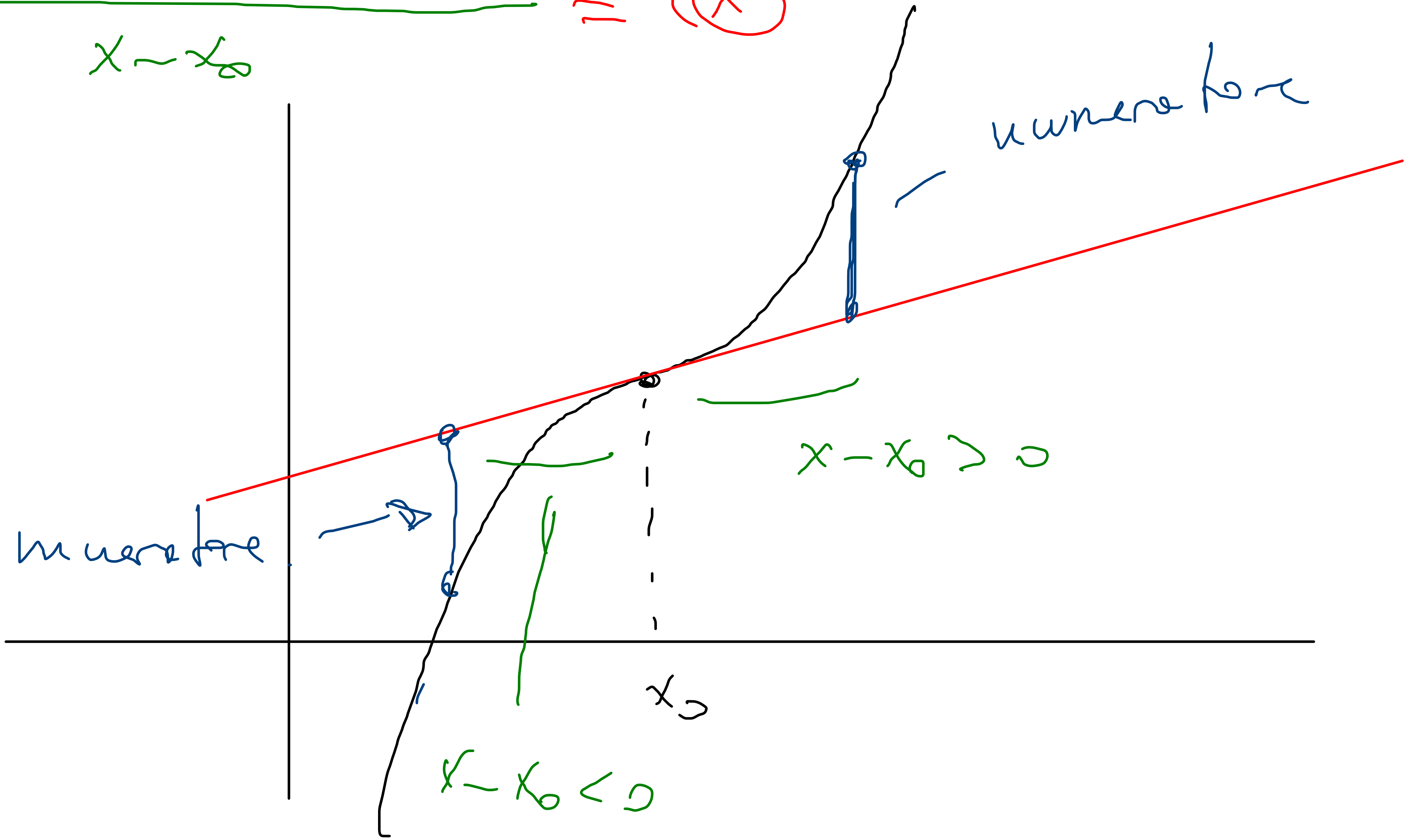
$$\frac{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)}{x - x_0}$$

non cambia segno in $V \setminus \{x_0\}$.

Se invece $f'(x_0) = \pm\infty$ (f non è derivabile) e se f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 (o viceversa) allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale

f deve essere continua in x_0.

$$\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0} = (*)$$

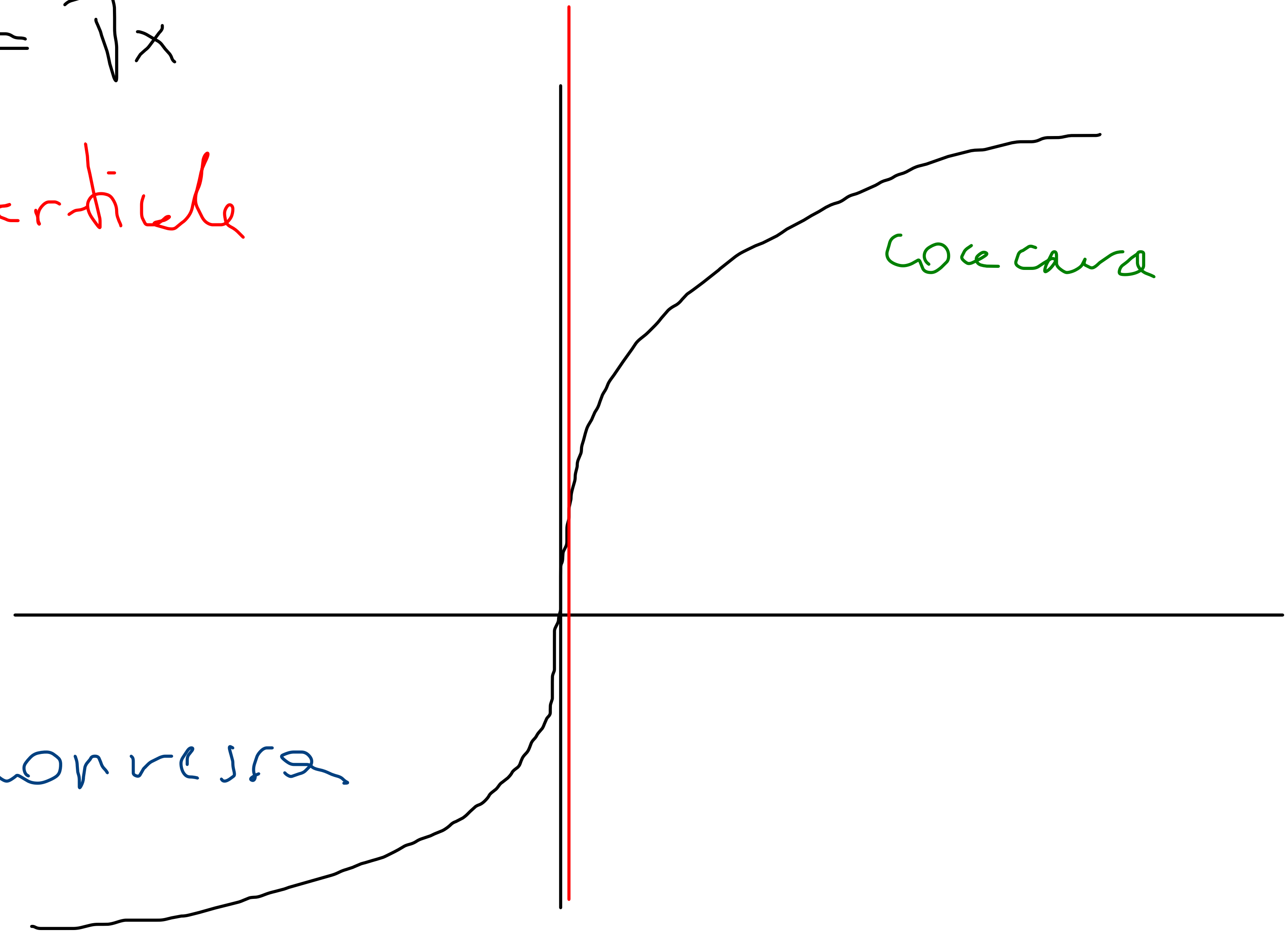


dire che x non cambia segno
vuol dire che la funzione passa
da sopra a sotto la tangente o
viceversa.

Es: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

tangente verticale

$f'(0) = +\infty$



Oss: se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo e f derivabile due volte in I.
Allora se $f''(x_0) = 0$ e f "cambia segno" in x_0 allora x_0 è punto di flesso.

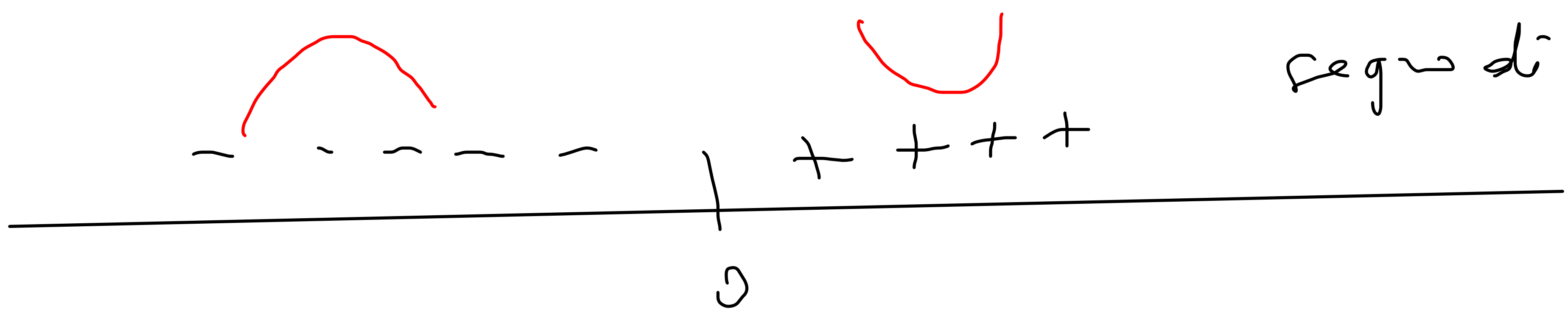
$f''(x) \leq 0$ se $x \leq x_0$ o viceversa

$f''(x) \geq 0$ se $x \geq x_0$

$x \in U$ intorno di x_0.

Es: $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f''(x) = 6x$

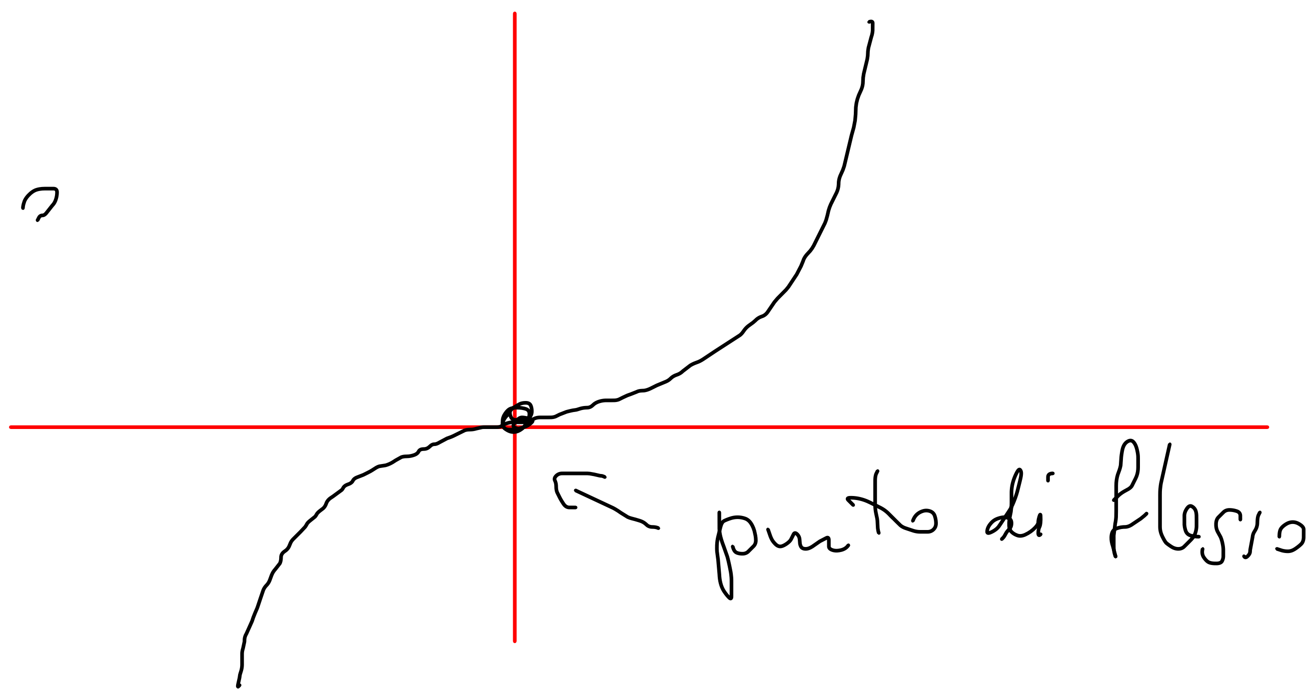
segno di f''



$f''(0) = 0$

$f''(x) \leq 0$ se $x \leq 0$

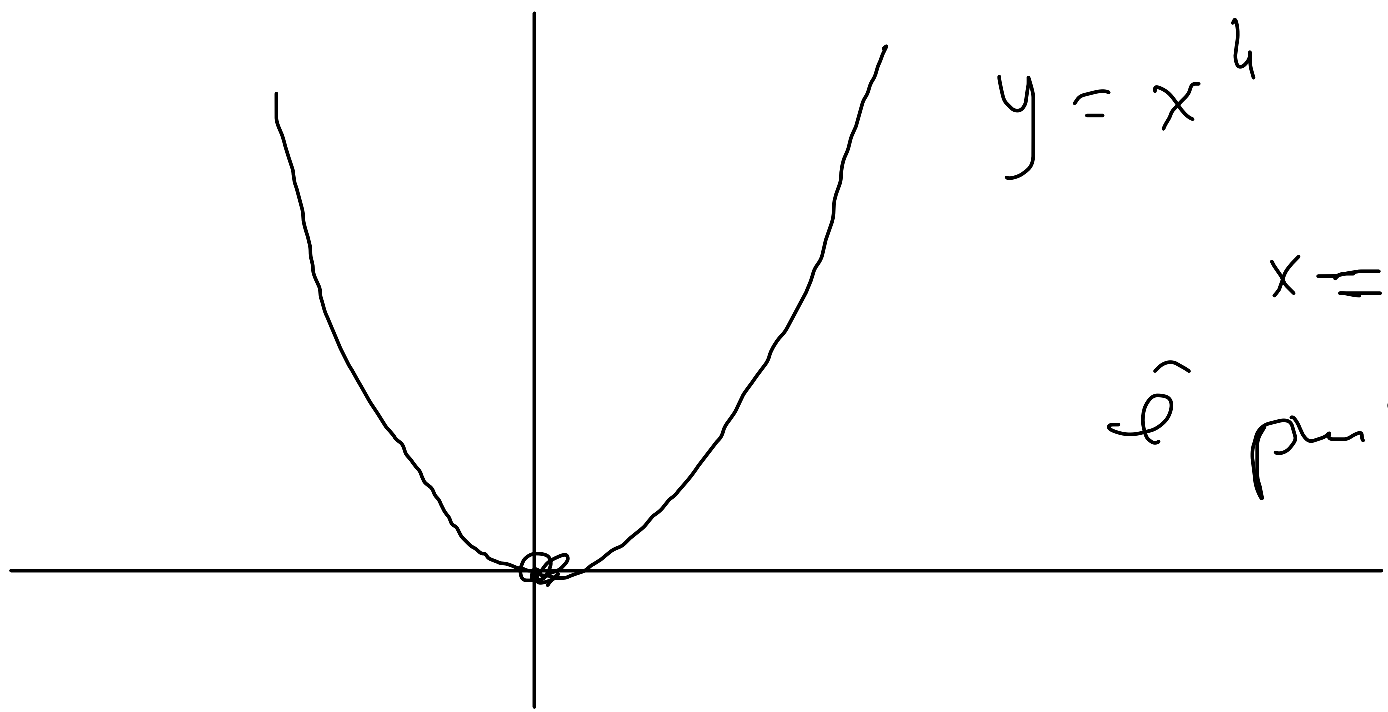
$f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.



Oss: $f''(x_0)=0$ non è suff. per avere un flesso.

Es: $f(x)=x^4$ $\quad f'(x)=4x^3$ $\quad f''(x)=12x^2$

$f''(0)=0$ $\qquad f''(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ è convessa in $\mathbb{R}$



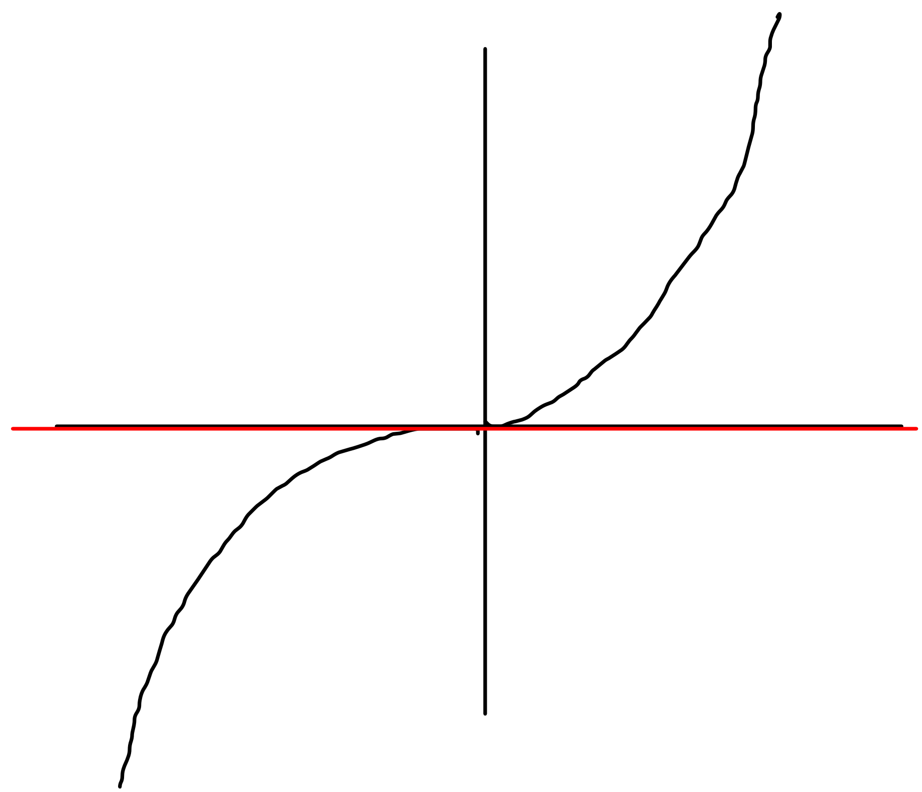
$y=x^4$

$x=0$ non è punto di flesso.

Oss: ci possono essere punti di flesso dove non esiste la derivata seconda.

Es: $f(x) = x \cdot |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$x_0 = 0$ è punto di flesso. Infatti

$f'(x) = 2x$ se $x > 0$

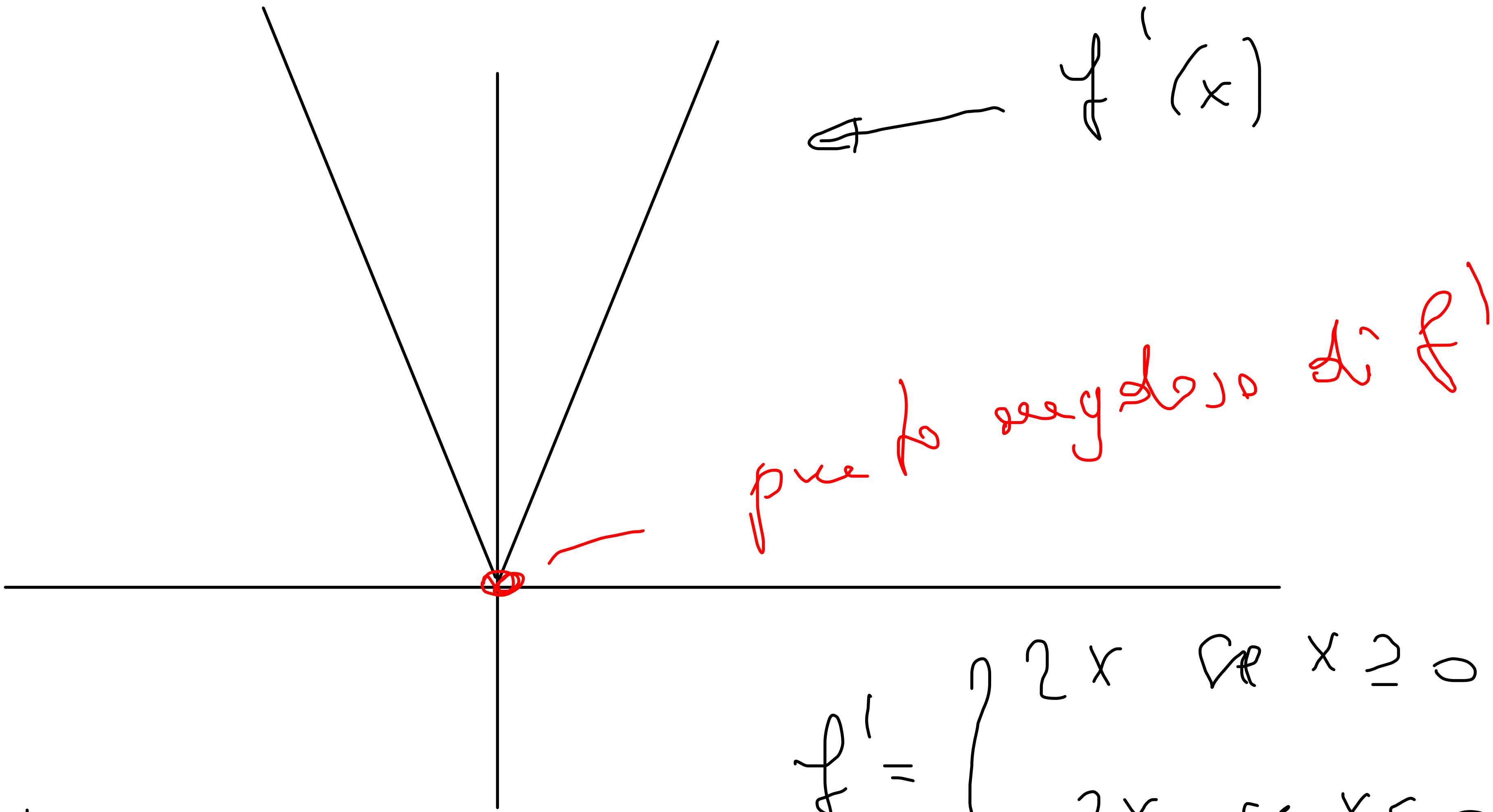
$f'(x) = -2x$ se $x < 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot |x| - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

retta tangente in $x = 0$ è $\boxed{y = 0}$

f passa da sotto a sopra la tangente in $x_0 = 0$.



$$f' = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'$ non è derivabile in $x_0 = 0 \Rightarrow \nexists\, f''(0)$.

Oss: $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, f convessa nei punti interni di I, f continua in I $\Rightarrow$ f è convessa in I.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa in (a,b)

f continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ f è convessa in $[a,b]$.

Studio di funzione

$f(x)$ viene assegnata senza specificare il dominio.

- determinare l'insieme di definizione di f
- determinare l'insieme di continuità di f
- determinare l'insieme di derivabilità di f
- eventuali asintoti: orizzontali, verticali, obliqui
- monotonia della funzione
- punti di massimo o di minimo locali

- massimo e minimo di f oppure sup e inf.
- convessità di f (punti di flesso).

Studiare la funzione

$$f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x}.$$

Insieme di definizione.

$|x| > 0 \iff x \neq 0$

Insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

La f è continua in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

La f è derivabile in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Asintoti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$$

$$f(x) = \log|x| - \frac{x^2 - 1}{4x} = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log|-\infty| - \frac{-\infty}{4} + \frac{1}{4(-\infty)} =$$

$$= \log(\infty) + \infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \log|0^-| - \frac{0^-}{4} + \frac{1}{4 \cdot (0^-)} = \log(0^+) - 0 - \infty$$

$$= -\infty - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} = \log|0^+| - \frac{0^+}{4} + \frac{1}{4\cdot 0^+} =$$

$$= -\infty - 0 + \infty \qquad \text{indeterminata.}$$

$= x,\ x>0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{4}\right) + \lim_{x\to 0^+} \log|x| + \frac{1}{4x} =$$

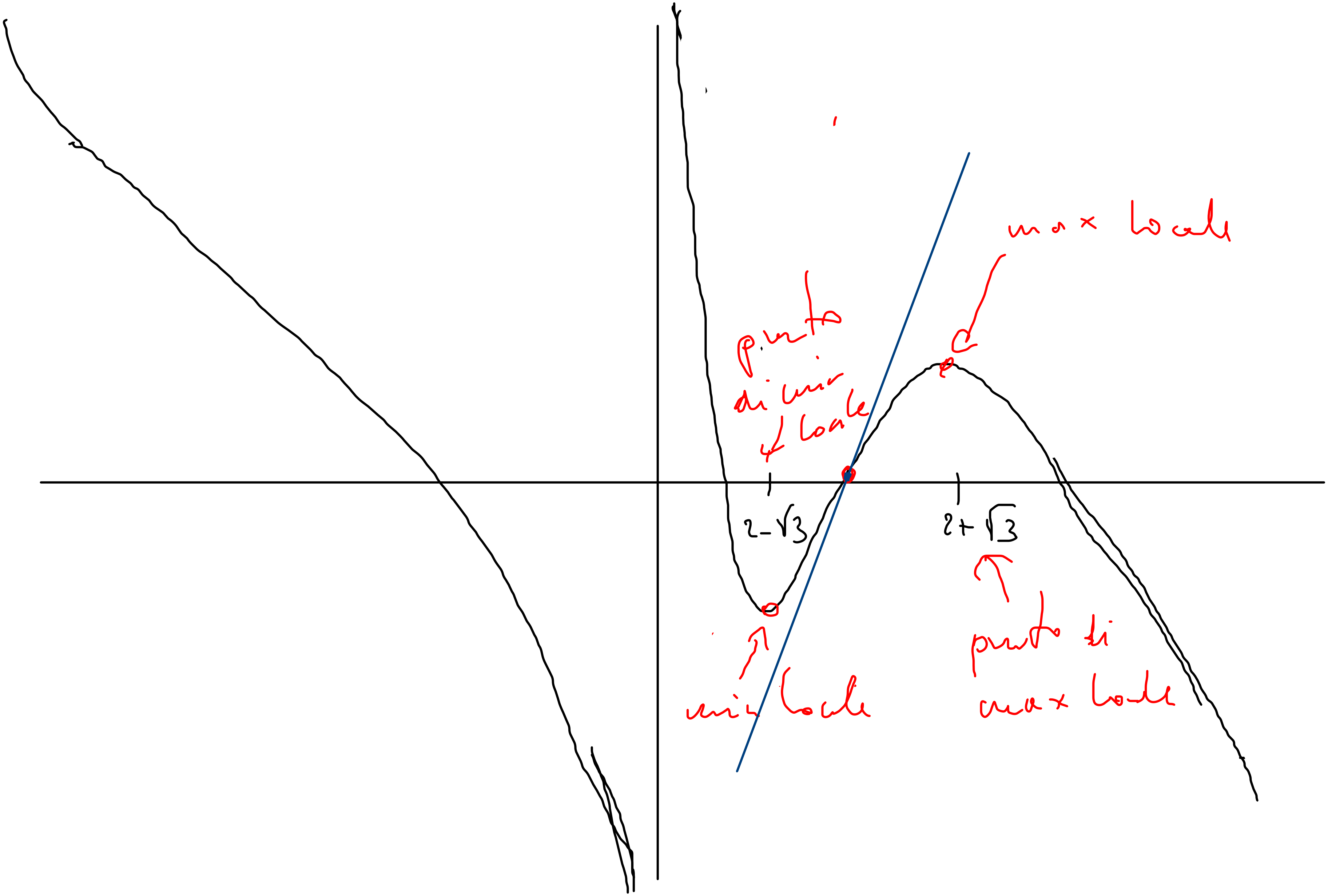
$$= 0 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\boxed{4x\log x} + 1}{4x} = 0 + \frac{0+1}{4\cdot 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \log|\infty| - \frac{\infty}{4} + \frac{1}{4\cdot\infty} = \underbrace{\infty - \infty}_{} + 0 = ?$$

$\to 0$

$\to 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\log|x|}{x} - \frac{1}{4}\right) + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x} = \infty\left(0 - \frac{1}{4}\right) + 0 = -\infty$$


max locale
punto di min locale
$2-\sqrt{3}$
$2+\sqrt{3}$
min locale
punto di max locale

Asintoto verticale di equazione $x = 0$

Nessun asintoto orizzontale.

Asintoti obliqui?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}\right)\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log|x|}{x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2} = 0 - \frac{1}{4} + 0 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \log|x| - \cancel{\frac{x}{4}} + \frac{1}{4x} + \cancel{\frac{1}{4}\cdot x} =$$

$$= \infty + 0 = +\infty$$

non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$
e neanche per $x \to -\infty$ perché i conti
sono uguali.

Dal fatto che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ otteniamo
che $\sup(f) = +\infty \Rightarrow f$ non ha massimo
Dal fatto che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ otteniamo
che $\inf(f) = -\infty \Rightarrow f$ non ha minimo.

Monotonia di f

$$D(\log|x|) \qquad \log|x| = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} D(\log x) = \dfrac{1}{x} \\ D(\log(-x)) = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$D(\log|x|) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x) = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x - x^2 - 1}{4x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{4x^2}$$

Segno di f'.

Il denominatore è > 0 in tutto il dominio.

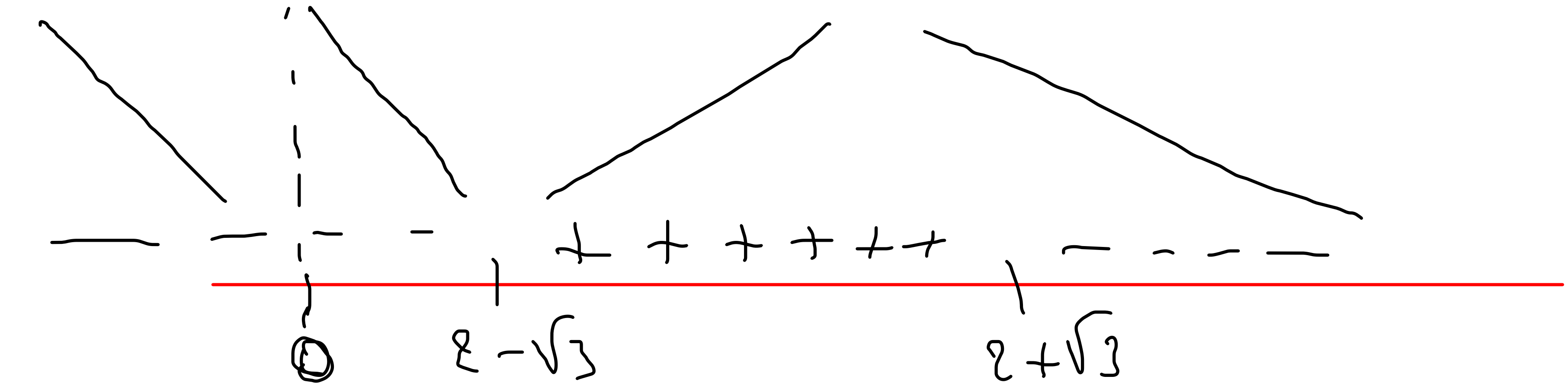
Allora il segno di f' è lo stesso del numeratore.

$$-x^2+4x-1 = 0 \iff x^2-4x+1=0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$

segno di f'

	$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$	
$- - - -$		$+ + + + + +$		$- - -$



f è decrescente in $(-\infty, 0)$

decresente in $(0, 2-\sqrt{3}]$

cresente in $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

decresente in $[2+\sqrt{3}, +\infty)$.

$x = 2-\sqrt{3}$ è punto di minimo locale

$x = 2+\sqrt{3}$ è punto di max locale.

Convessità

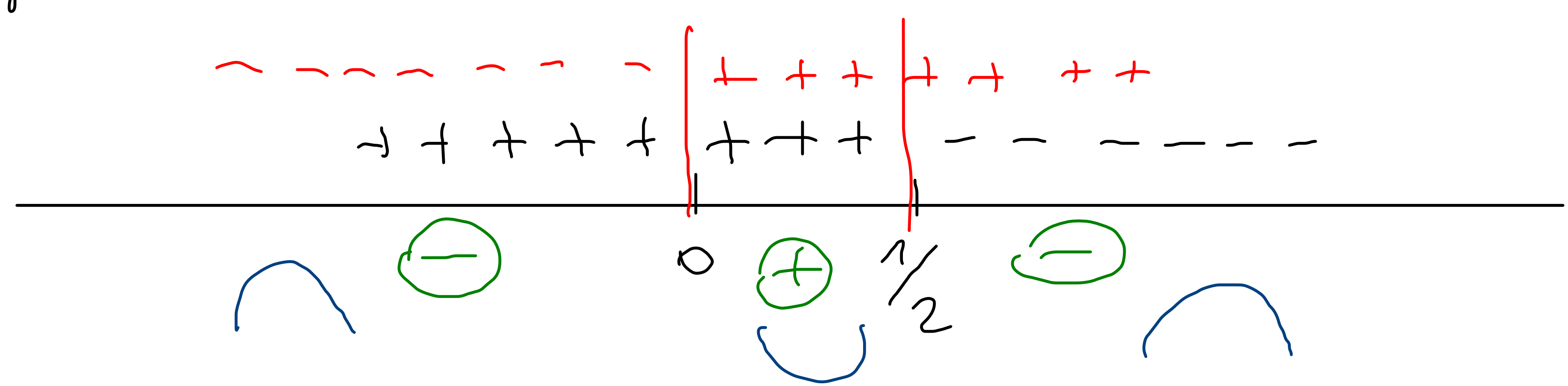
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} \qquad D(x^{-2}) = -2x^{-3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{-2x+1}{2x^3}$$

segno?

segno numeratore $-2x+1 > 0 \iff 1 > 2x \iff x < \frac{1}{2}$

segno denominatore $2x^3 > 0 \iff x > 0$



f è concava in $(-\infty, 0)$

convessa in $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

concava in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Il punto di ascissa $x = \frac{1}{2}$ è di flesso.