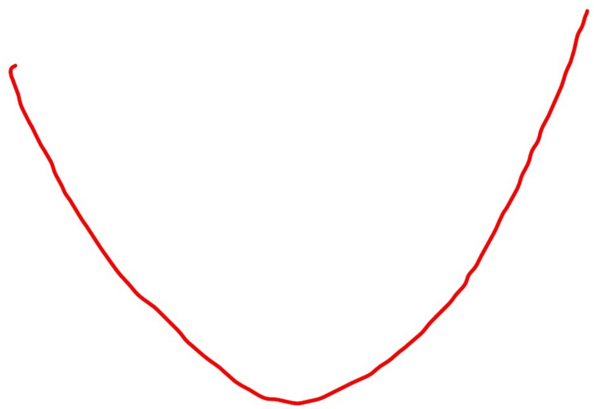
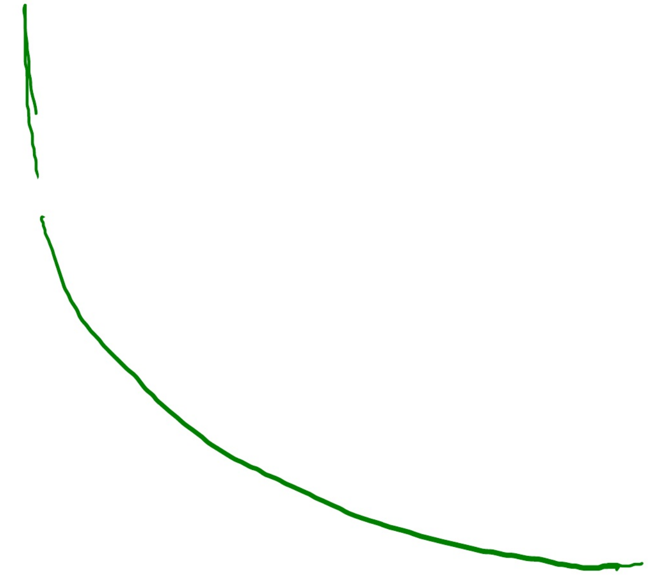
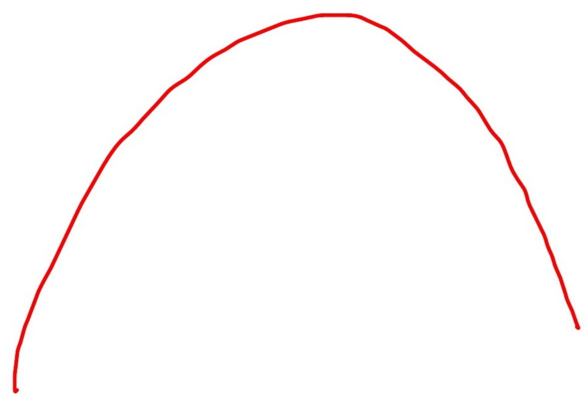
Convessità



convessa



$\frac{1}{x}$ $\underline{x > 0}$



concava.

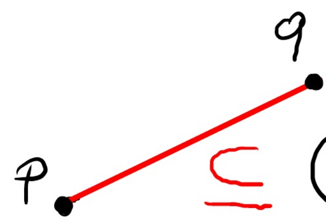
Definizione

Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \ldots)$

si dice CONVESSO

se dati due suoi punti tutto il segmento da essi delimitato è contenuto in C.

$p \in C$ $\quad q \in C$ $\quad \Longrightarrow$



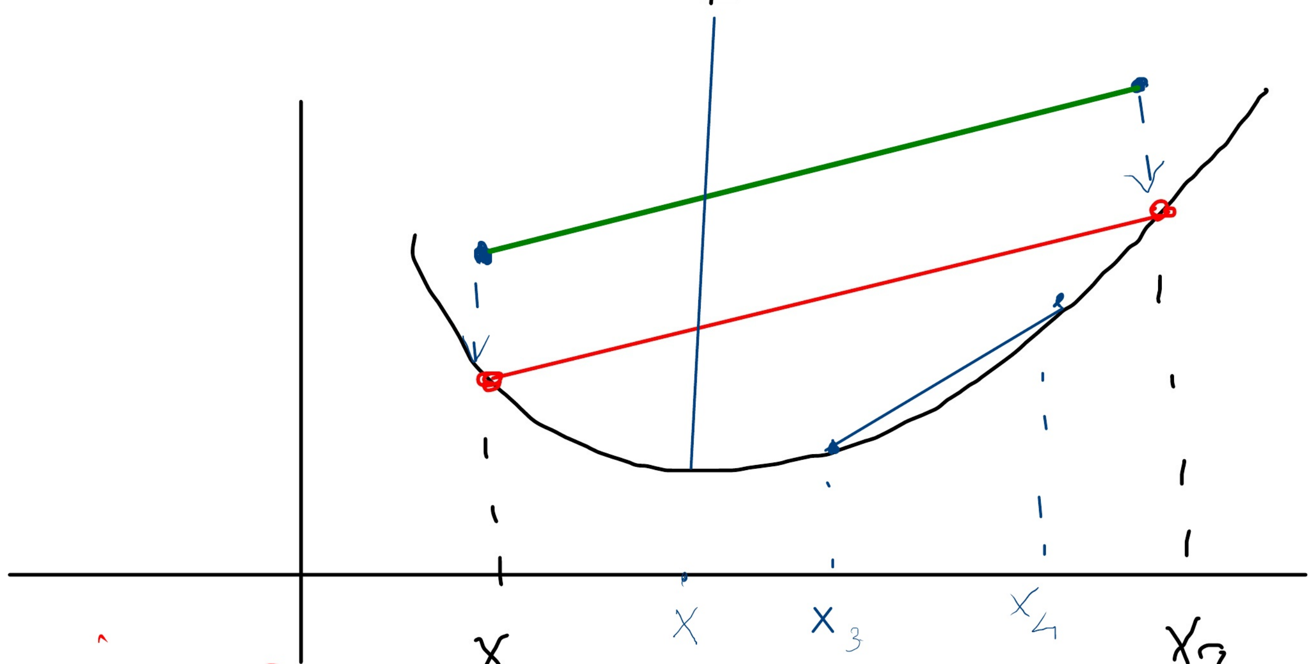
$\subseteq C$

e.g. i sottoinsiemi <u>convessi</u> di <u>$\mathbb{R}$</u> sono tutti e soli gli <u>intervalli</u>

dominio convesso

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo $f: I \to \mathbb{R}$

f si dice convessa in I se, presi due punti qualsiasi sul grafico di f, il segmento (corda) che li unisce è sopra il grafico di f.



Osservazione: ciò equivale a dire che il sopragrafico di $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \text{ e } f(x) \le y\}$ è convesso

Osservazione:

Si dà tale definizione poiché così è semplice descrivere la corda tra $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ come grafico di una funzione

$$r : [x_1; x_2] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad r(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1)$$

Osservazione poiché

$$[x_1; x_2] = \{ t(x_2-x_1)+x_1 : \underline{t\in[0;1]} \} = \{ tx_2+(1-t)x_1 : t\in[0;1] \}$$

e quindi se $x = t(x_2-x_1)+x_1$, si ha $r(x) = (f(x_2)-f(x_1))t + f(x_1)$
$= tf(x_2) + (1-t)x_1$, la corda tra $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è

$$\{ (tx_2+(1-t)x_1; \underline{tf(x_2)+(1-t)f(x_1)}) : t\in[0;1] \}$$

Quindi

In formule

f si dice convessa in I se $\forall\, x_1, x_2 \in I$

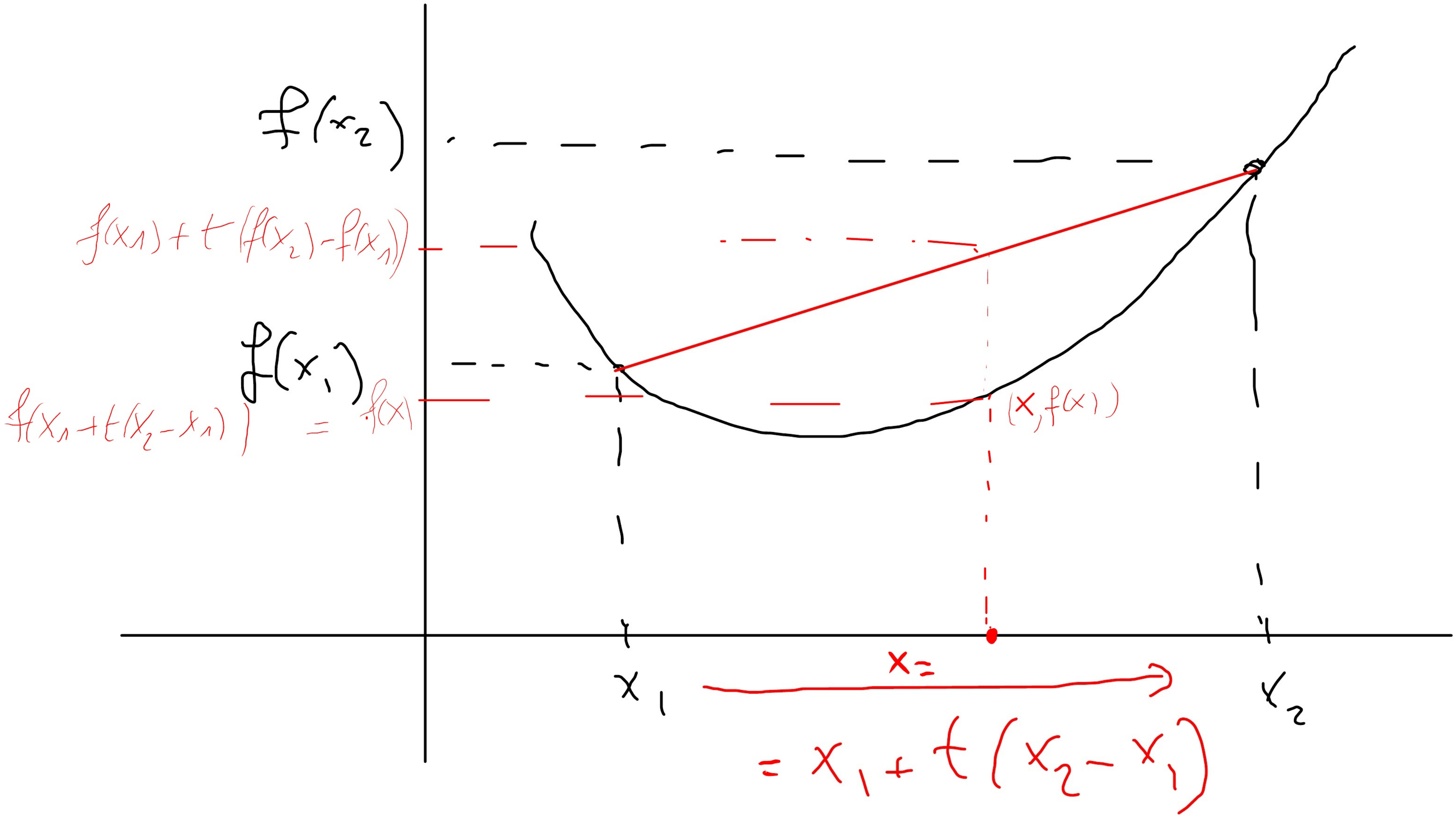
con $x_1 < x_2$ e $\forall\, t \in (0,1)$ risulta

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t\,(f(x_2) - f(x_1))$$

se la stessa disuguaglianza vale con $<$

(minore stretto) allora f si dice

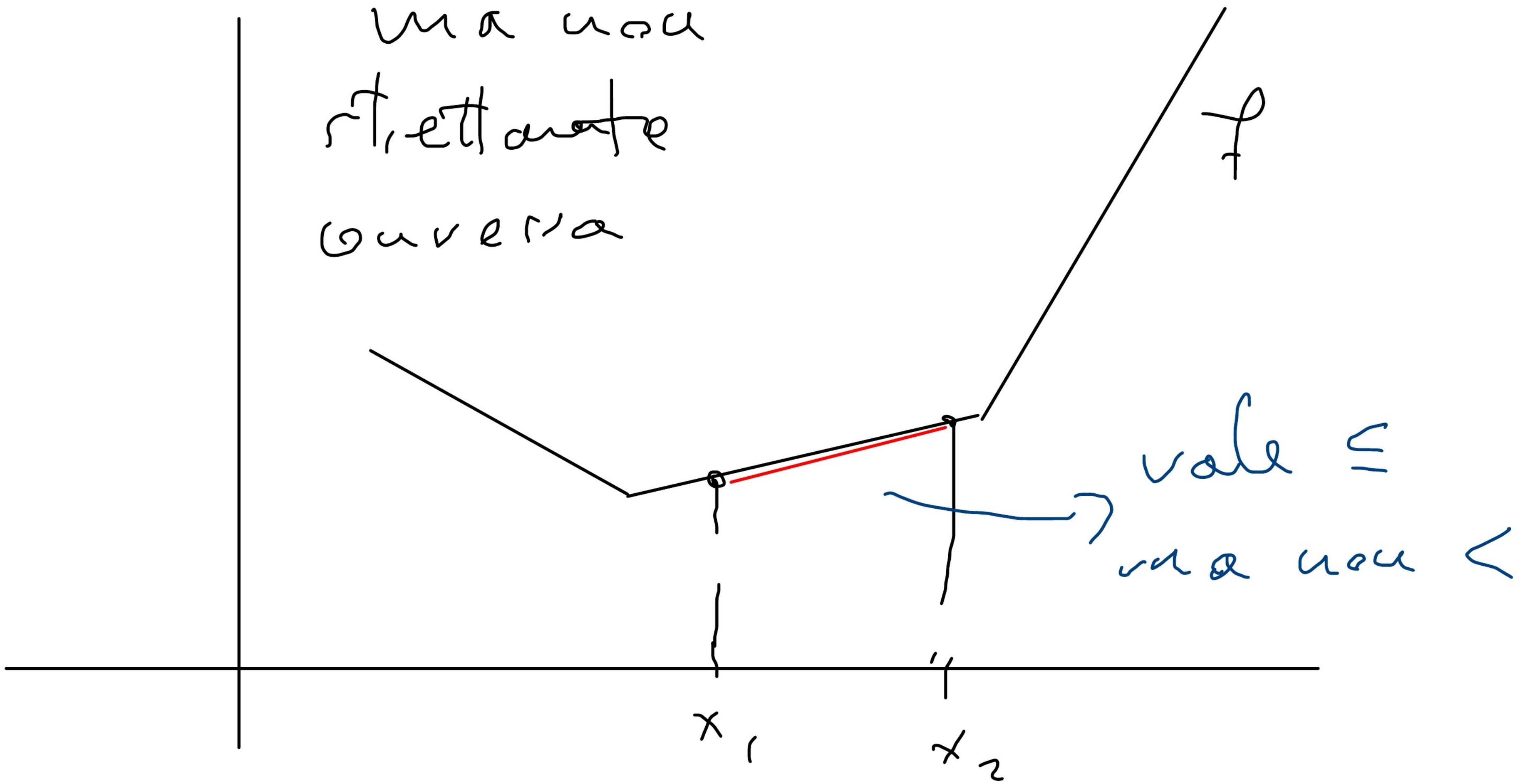
strettamente convessa.



f(x2)
f(x1)+t(f(x2)-f(x1))
f(x1)
f(x1+t(x2-x1)) = f(x)
(x, f(x))
x1
x=
x2
= x1+t(x2-x1)

f è convessa

ma non strettamente convessa

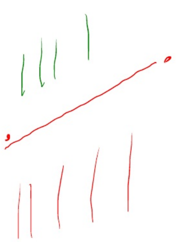


Def: f si dice concava se $-f$ è convessa. Strettamente concava se $-f$ è strettamente convessa.

Quali sono le funzioni sia concave che convesse?

Quali sono le funzioni sia cresc. che decres.?

LE COSTANTI



polinomi di primo grado

NOTA:

non convessa NON VUOL DIRE concava

In formula per una funzione concava vale

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$$

<u>Es</u>: $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

è convessa

$f(x) = -x^2$ è concava.

Verifichiamo con la definizione che $f(x) = x^2$ è convessa $I = \mathbb{R}$, x e $y \in \mathbb{R}$ $\quad x < y$

? $\underline{0 < t < 1}$ $\quad f(x + t(y-x)) = (x + t(y-x))^2 < f(x) + t(f(y) - f(x))$

$$x^2 + t(y^2 - x^2)$$

$y > x$

$\forall\, t \in (0;1)$

$$(x + t(y-x))^2 \overset{?}{\underline{\underline{<}}} x^2 + t(y^2 - x^2)$$

$v = y - x$ — per comodità

$v \neq 0$

$$(x + tv)^2 \overset{?}{<} x^2 + t((v+x)^2 - x^2)$$

$$x^2 + t^2v^2 + 2tvx \;?\; x^2 + t(v^2 + \cancel{x^2} + 2vx - \cancel{x^2})$$

$$\cancel{x^2} + t^2v^2 + \cancel{2tvx} \;?\; \cancel{x^2} + tv^2 + \cancel{2tvx}$$

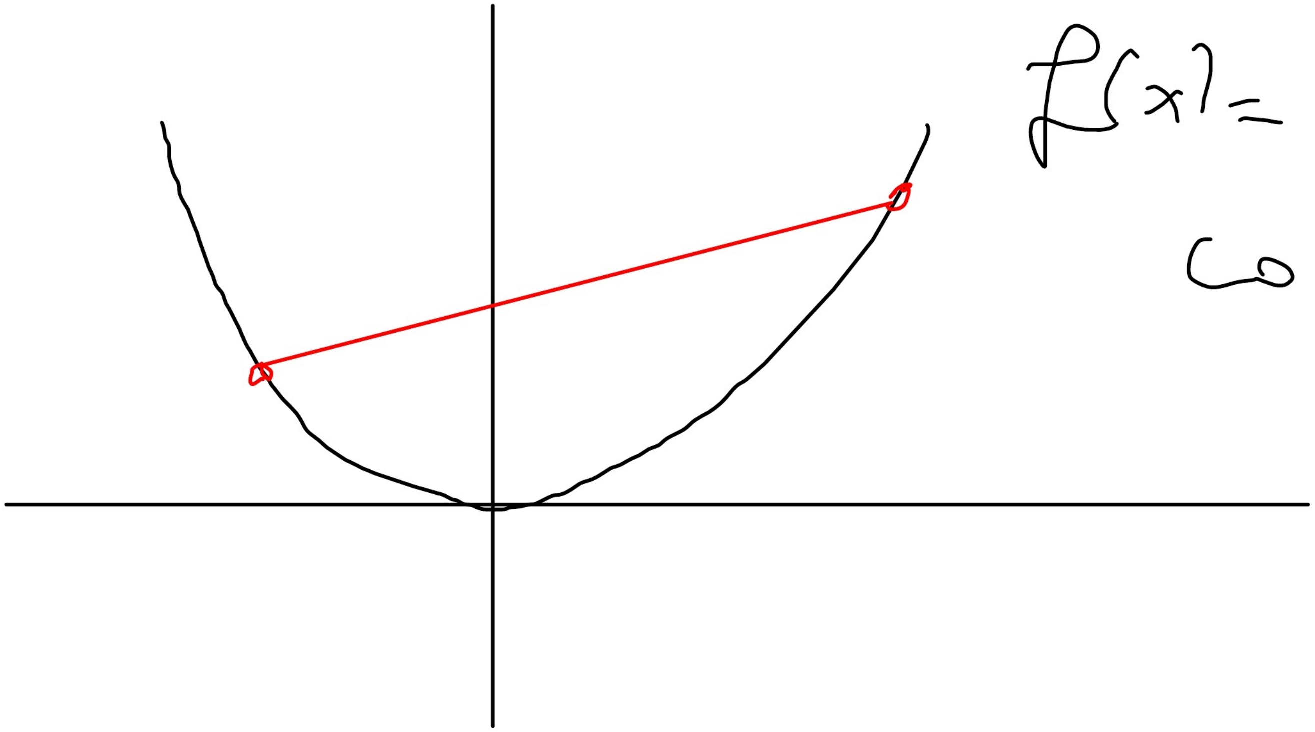
$$t^2 \cdot v^2 \;?\; t \cdot v^2$$

$t > 0$

$$t^2 \;?\; t$$

$$t \;?\; 1$$

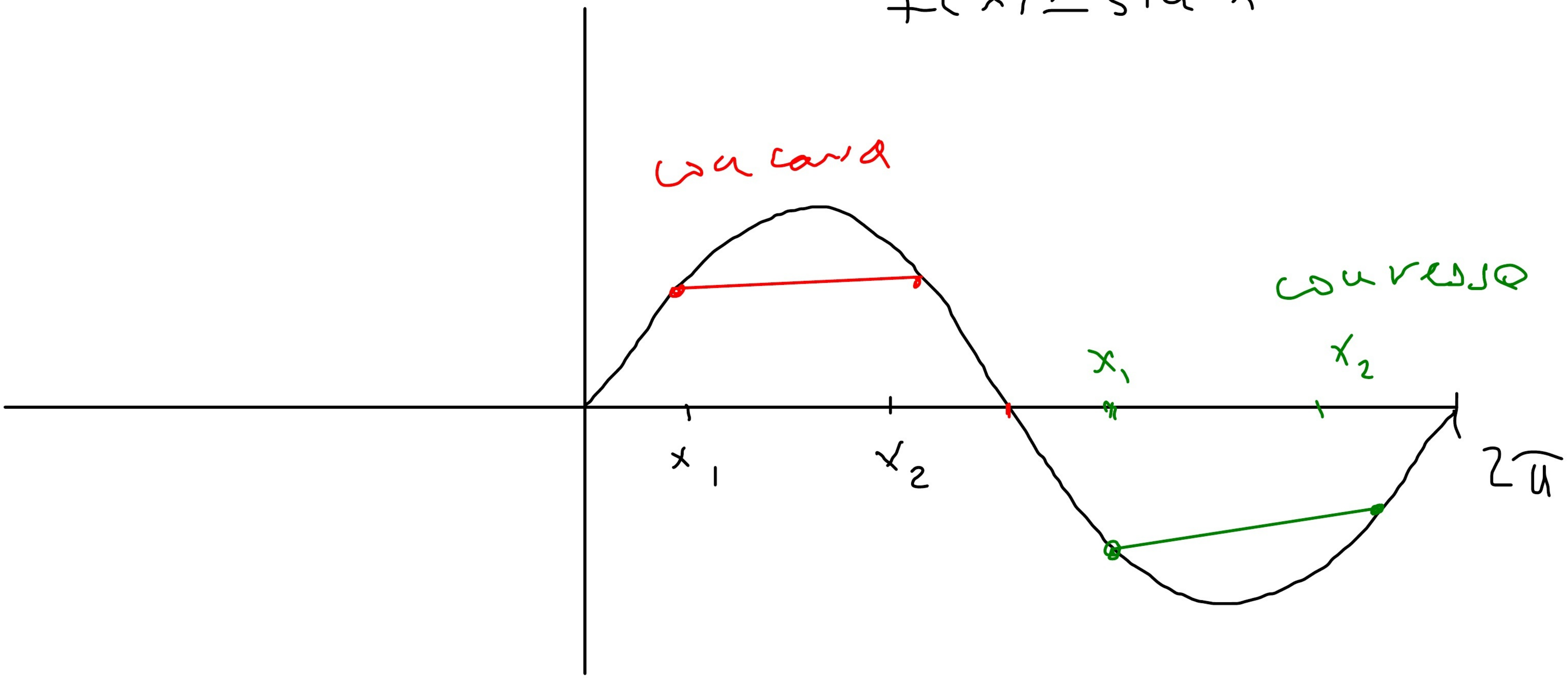
$$<$$



$f(x) = x^2$

convessa

$f(x) = \sin x$



f non è né concava né convessa sull'intervallo $[0, 2\pi]$.

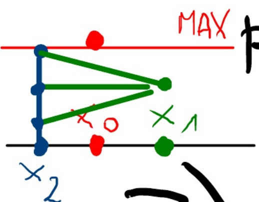
Proposizione

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo

intervallo senza estremi

1) Se f è convessa allora f è continua in $\mathrm{Int}(I)$

2) Se f è convessa e assume massimo, se ha punti di massimo interni deve esser costante

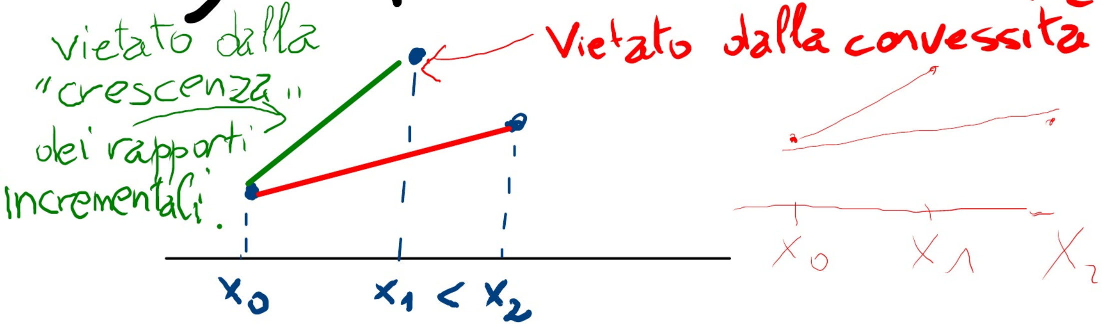


se $\exists x_1 \geq x_0$ $f(x_1) < MAX$ $\forall x_2 \leq x_0$ $(x_0, f(x_0))$ sta sopra la corda tra $(x_2, f(x_2))$ e $(x_1, f(x_1))$

3) f è convessa se e solo se $\forall x_0 \in I$

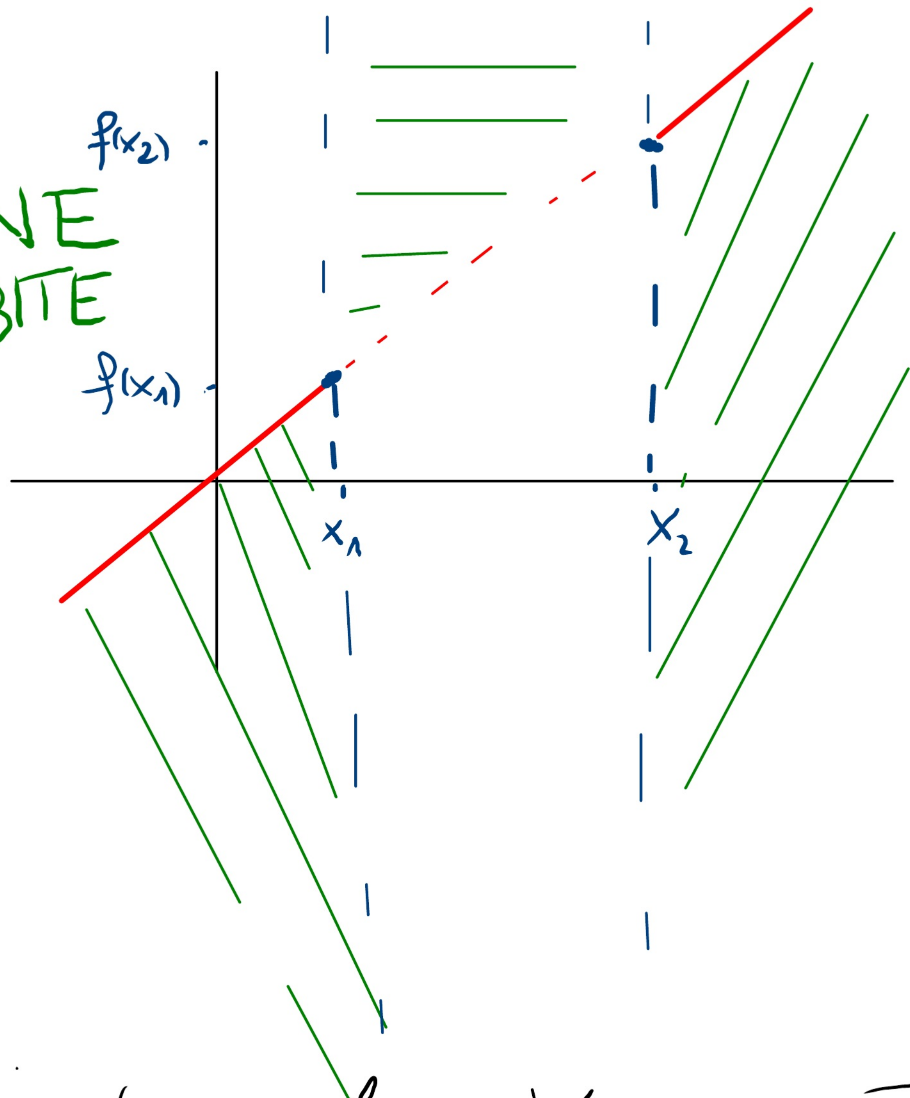
$$\Longleftrightarrow \quad R_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

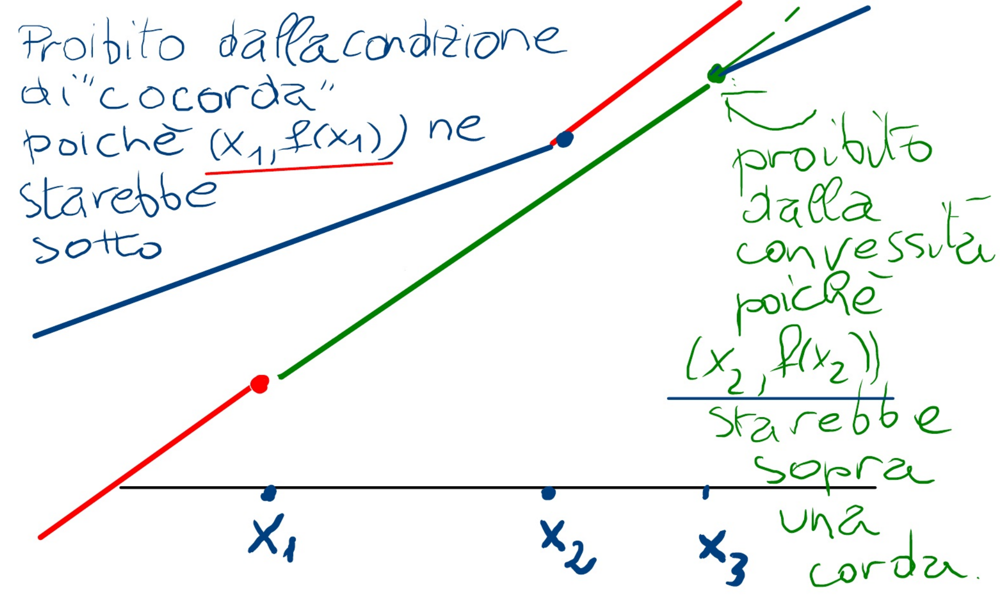
è crescente su $I \setminus \{x_0\}$



4) f è convessa se e solo se il suo grafico sta SOPRA le due semirette che (cocorde) prolungano una qualsiasi corda con estremi sul grafico stesso

ZONE PROIBITE





$\forall x \in I \quad x \notin (x_1; x_2) \qquad x_1 < x_2$

in formule: $\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall t \quad t \leq 0$ o $t \geq 1$

con $x_1 + t(x_2 - x_1) \in I$ si ha $f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1))$

(se $>$ per $t \neq 0$ e $t \neq 1$ si caratterizza la stretta convessità)

Dim di 1)

sia x_0 in $Int(I)$

vi sono $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_0 < x_2$

per 3)

$$\forall x \in (x_1; x_2) \quad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

$x \in (x_1; x_0)$

$x < x_0$

$x - x_0 < 0$

$$(x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq f(x)-f(x_0) \geq (x-x_0)\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

$x \in (x_0; x_2)$

$x - x_0 > 0$

$$(x-x_0)\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f(x)-f(x_0) \leq (x-x_0)\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

Per il criterio dei "carabinieri"

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)-f(x_0)=0, \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)-f(x_0)=0$$

Corollario

3) segue che in ogni punto interno x_0 dell'intervallo su cui una funzione convessa è definita

$\exists\ f'_+(x_0)\ ,\ f'_-(x_0)$ finiti

<u>DIM</u> esistono i limiti destri e sinistri delle funzioni crescenti $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

e poiché vi sono $x_1 < x_0 < x_2$

tali limiti sono compresi

tra $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ e $\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.

Proposizione

$f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile in I

f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra le sue rette tangenti.

in formule $\forall x, x_0 \in I$ $\quad \boxed{f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

per esempio se $x > x_0$ $\quad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \quad (x \neq x_0)$

(limiti di funzioni crescenti)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0}$$

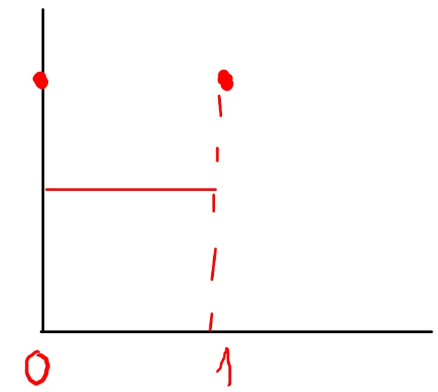
$*$

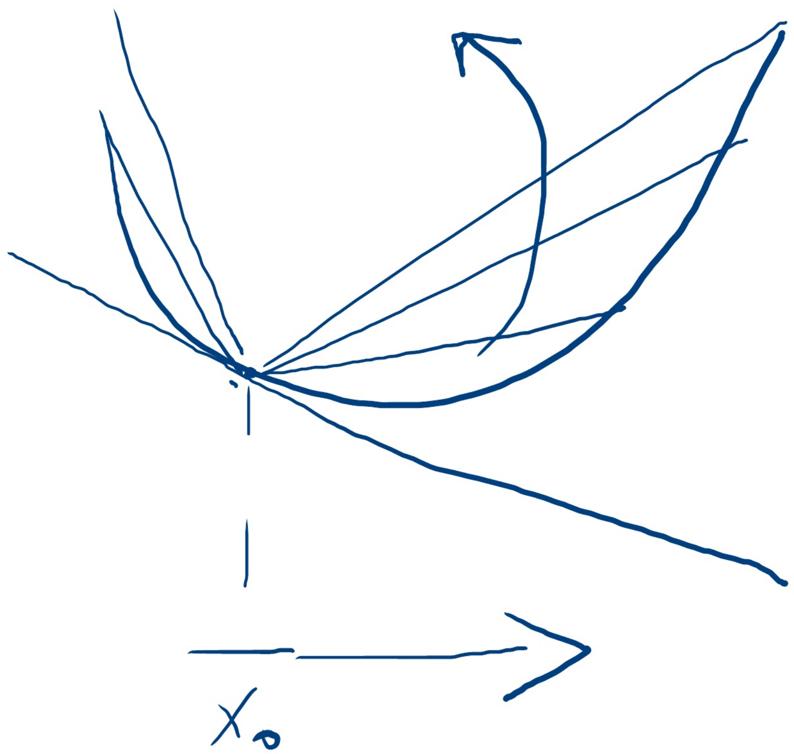
$x > \xi > x_0 \qquad \xi \to x_0^+$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & x = 0 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

è convessa non continua





Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte. Sono equivalenti:
le asserzioni in nero

1) f è convessa (strettamente convessa)

$\Updownarrow$

2) f' è debolmente crescente (strett. crescente)

3) $f'' \geq 0$ $(f'' > 0)$ $\Rightarrow$

$f(x) = x^4$ è strettamente convessa ma $f''(0) = 0$

Es: $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f è convessa (strettamente) in $\mathbb{R}$.

f convessa $x_2 > x_1$

$$\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} \geq \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \overset{x\geq z}{\geq} \frac{f(z)-f(x_1)}{z-x_1}$$

$$\parallel$$

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

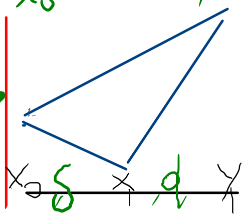
$x \to x_2^-$ $\downarrow$ $z \to x_1^+$ $\downarrow$

$$f'_d(x_2) \geq f'_s(x_2) \geq f'_d(x_1) \geq f'_s(x_1)$$

(*) $\mu \leq m$, $x_0 < x < y$,

$$M = \frac{md+\mu\delta}{d+\delta} \geq \frac{\mu(y-x)+\mu(x-x_0)}{y-x_0} = \mu$$

studiatelo nel libro



Viceversa se la funzione è derivabile

f' crescente $\Rightarrow$ f convessa

Aggiunto: se $x<y$ 1) $x<x_0<y$ $x<\xi<x_0<\eta<y$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \qquad \eta > \xi$$

2) $x_0<x<y$

$$\mu = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \overset{1)}{\leq} m = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\eta) \overset{\text{DER}(*)}{\leq} M = \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y}$$

3) $x<y<x_0$ ANALOGO

MONOTONIA DI f $\longleftrightarrow$ SEGNO DEI RAPPORTI INCREMEN

SEGNO DERIV. $\leftarrow$ Lagrange

CONVESSITÀ DI f $\longleftrightarrow$ MONOTONIA DEI RAPPORTI INCREMENT.

$\uparrow$ MONOTONIA DERIVATA

Es: $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x > 0$

sempre $\Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente convessa.

Es: $f(x) = \log x$ $\quad f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ $\quad \forall x > 0$

$\Rightarrow f$ è strettamente concava

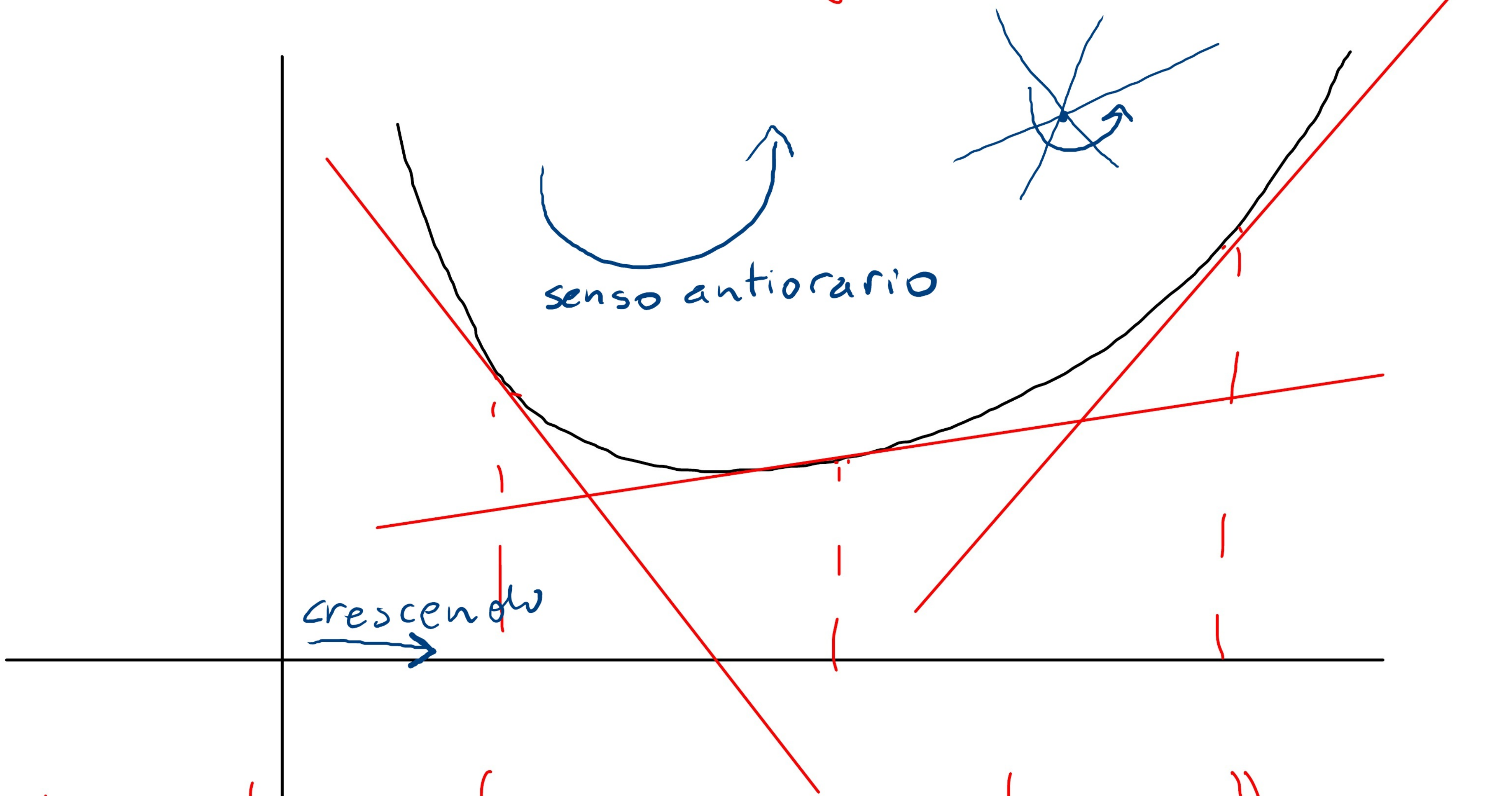
$\sin: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (\sin x)'' = -\sin x < 0$

$(0; \pi)$

$\sin x$ è concava in $(0, \pi)$

Cosa vuol dire che f' è crescente?

Il coeff. angolare della tangente cresce



"La tangente ruota in senso antiorario"

Es: $f(x) = \sin x$ $\quad f: [0, 2\pi]$.

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$

$-\sin x \geq 0 \iff \sin x \leq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$

$f''(x) \geq 0 \iff x \in [\pi, 2\pi]$

$f''(x) \leq 0 \iff x \in [0, \pi]$