Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile.

Allora f è convessa in I se e solo se $\forall x_0 \in I$ il grafico di f è sopra la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$. Cioè, $\forall x_0, x \in I$

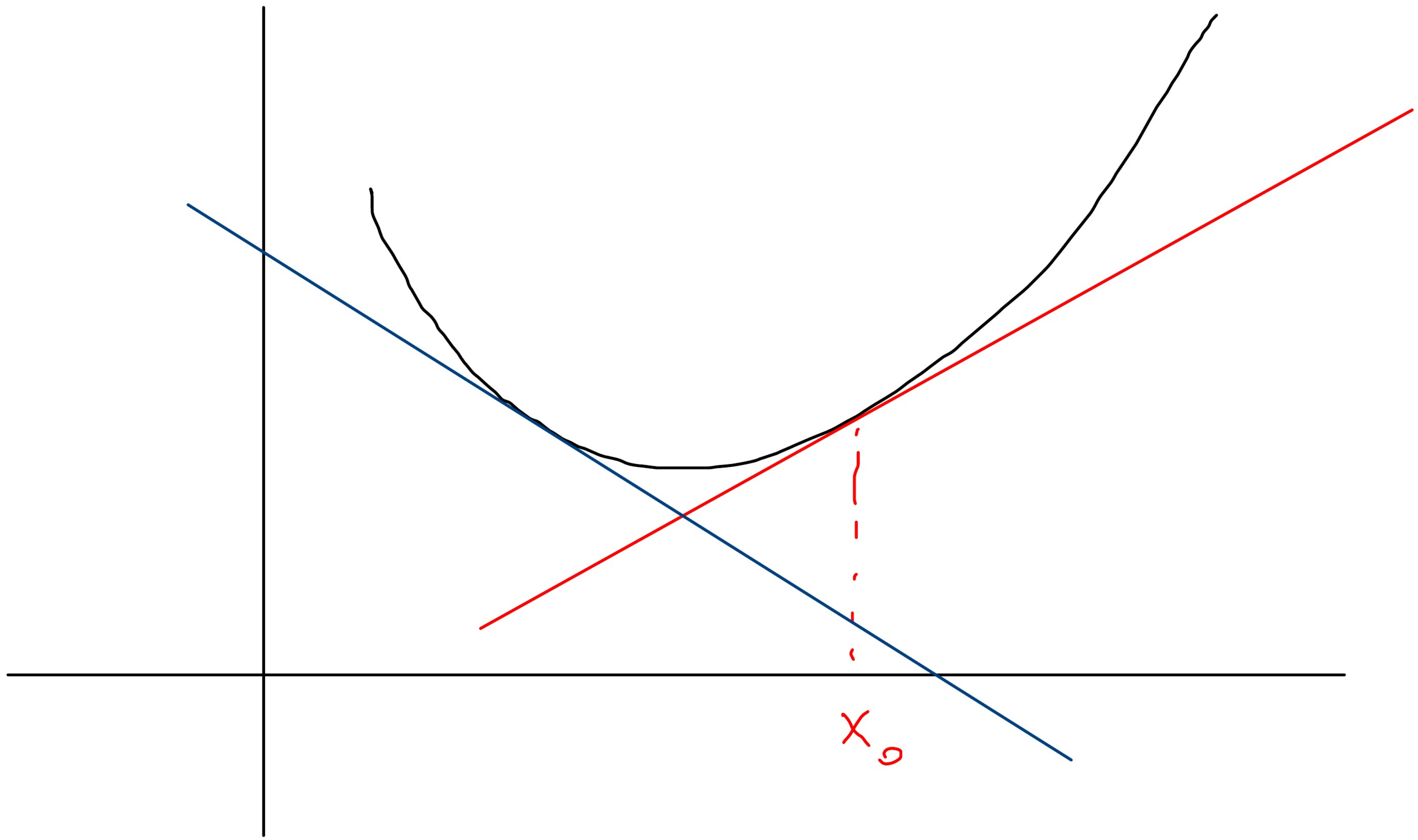
$$f(x) \geq \underbrace{\boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}}_{\text{retta tangente}}$$

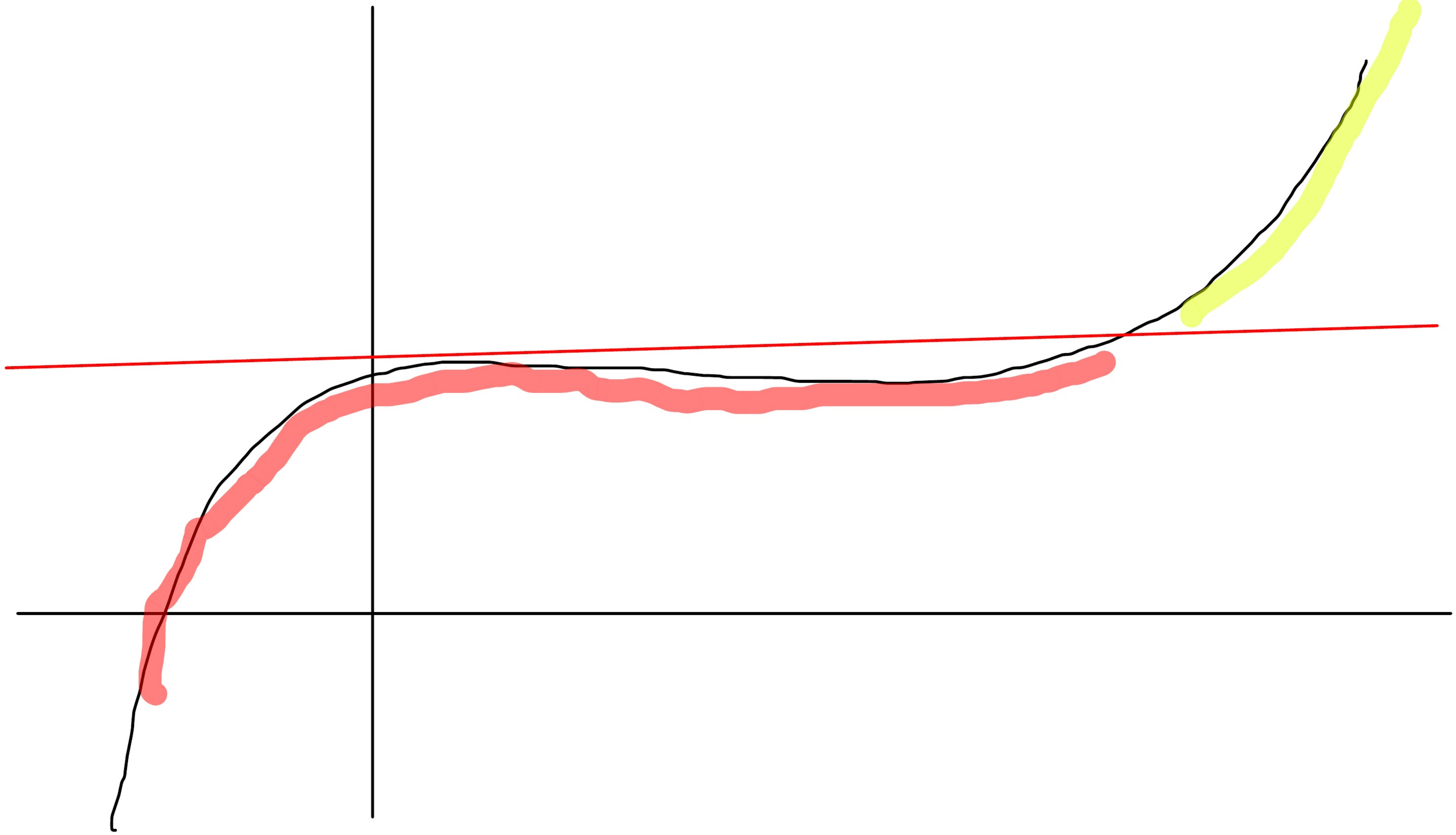
e.g. $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)$$

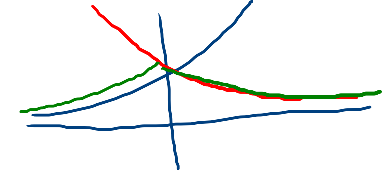
Concava se vale il $\leq$

Strett. convesse se vale $>$ con $x \neq x_0$.


x_0



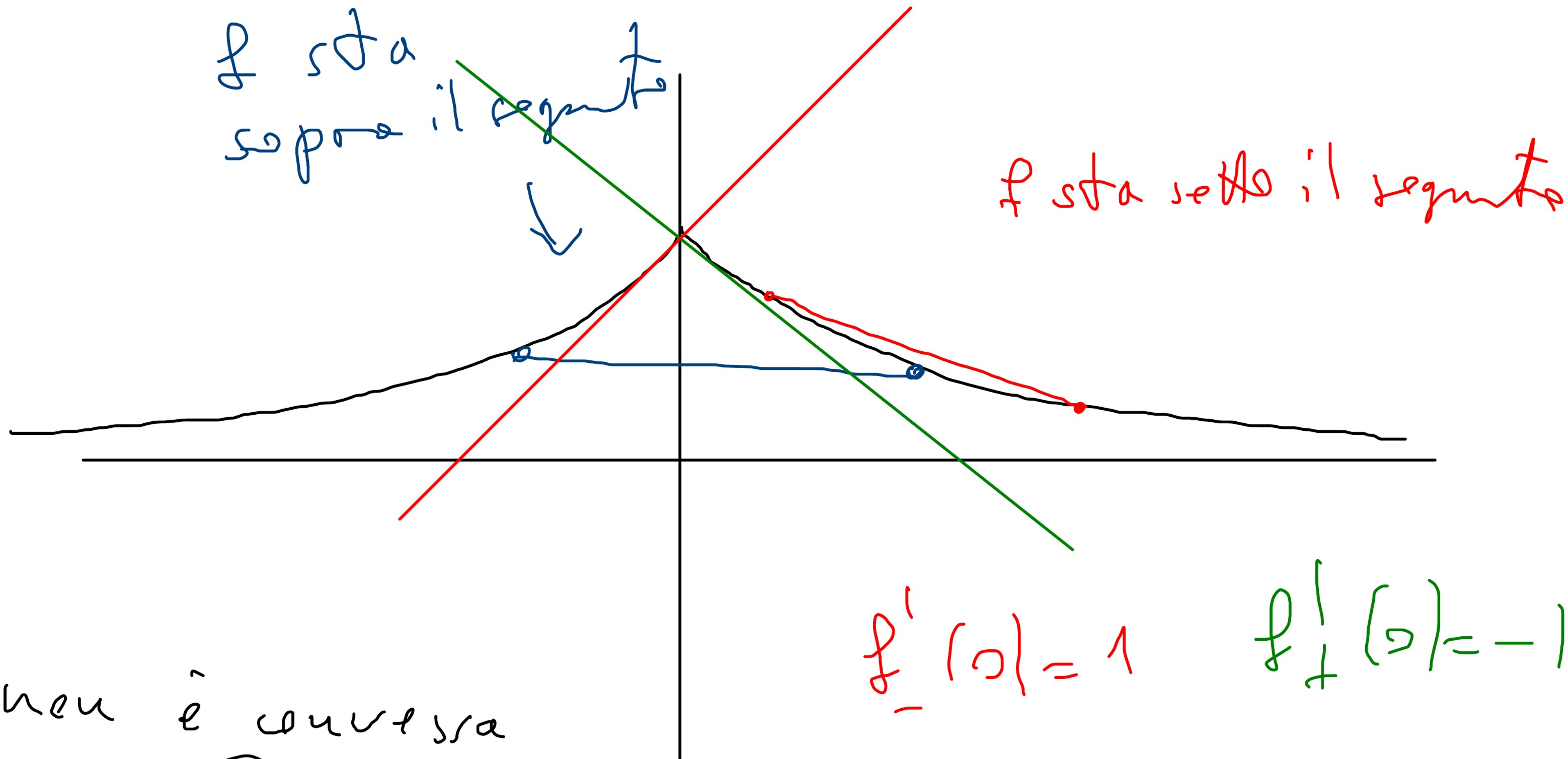
Es: $f(x) = e^{-|x|}$



pari

$f(x) = e^{-x}$ se $x \geq 0$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



f non è convessa in $\mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-|x|} = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se $x > 0$ $\quad f'(x) = -e^{-x} \quad f''(x) = e^{-x} > 0$

$\Rightarrow$ f è convessa sull'insieme $\{x \geq 0\}$.

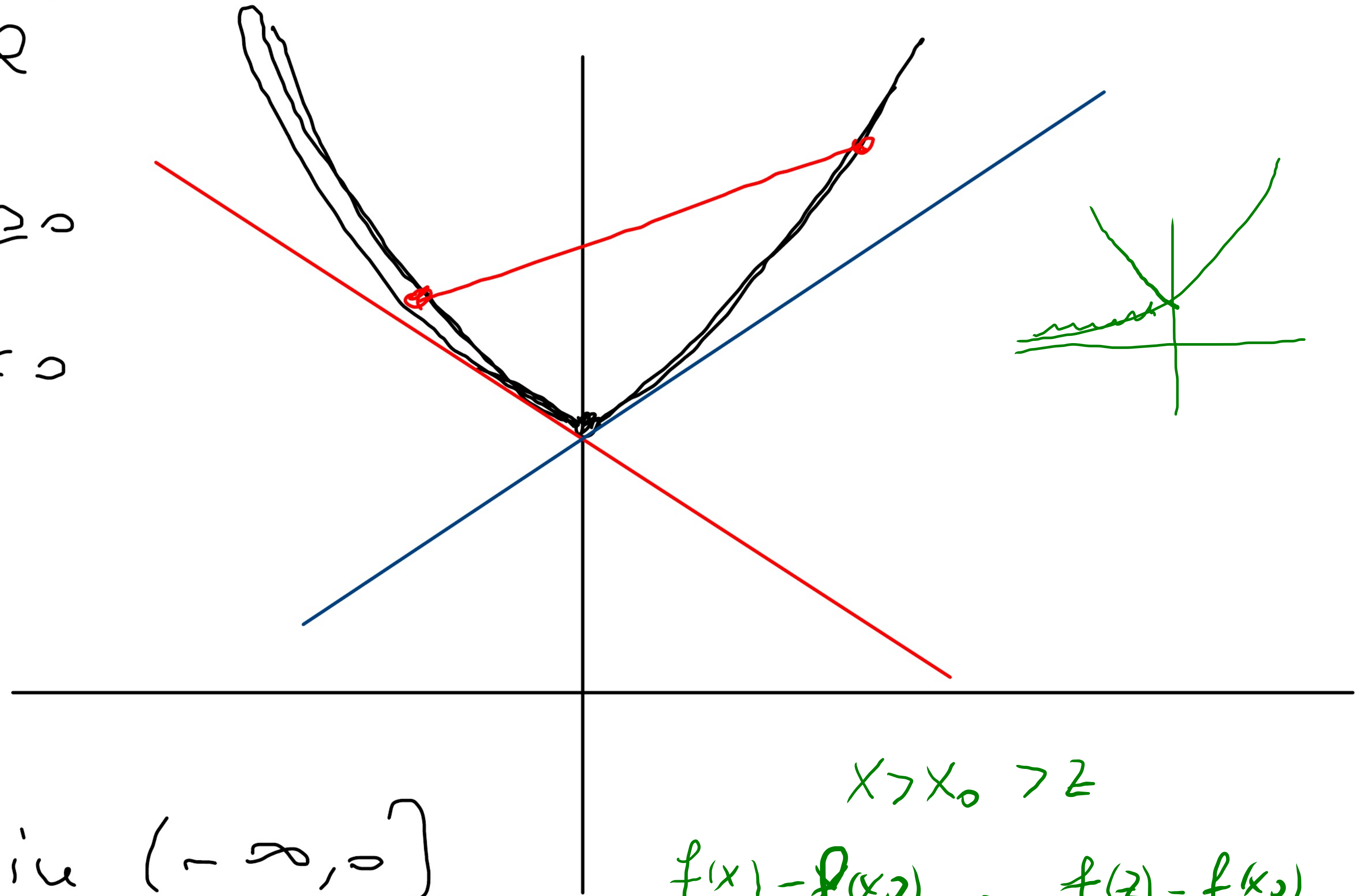
Se $x < 0$ $\quad f'(x) = e^{x} \quad f''(x) = e^{x} > 0$

$\Rightarrow$ f è convessa sull'insieme $\{x \leq 0\}$

Ma f non è convessa in $\mathbb{R}$

Es: $f(x) = e^{|x|}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$f'_-(0) = -1$$

$$f'_+(0) = 1$$

$x > x_0 > z$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0}$$

f è convessa in $(-\infty, 0]$

f è convessa in $[0, +\infty)$

e in questo caso f è convessa in $\mathbb{R}$.

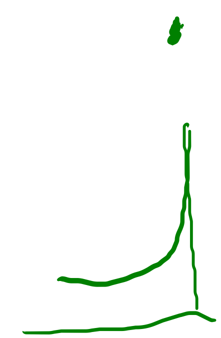
Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, x_0 punto interno di I, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile in $I \setminus \{x_0\}$.

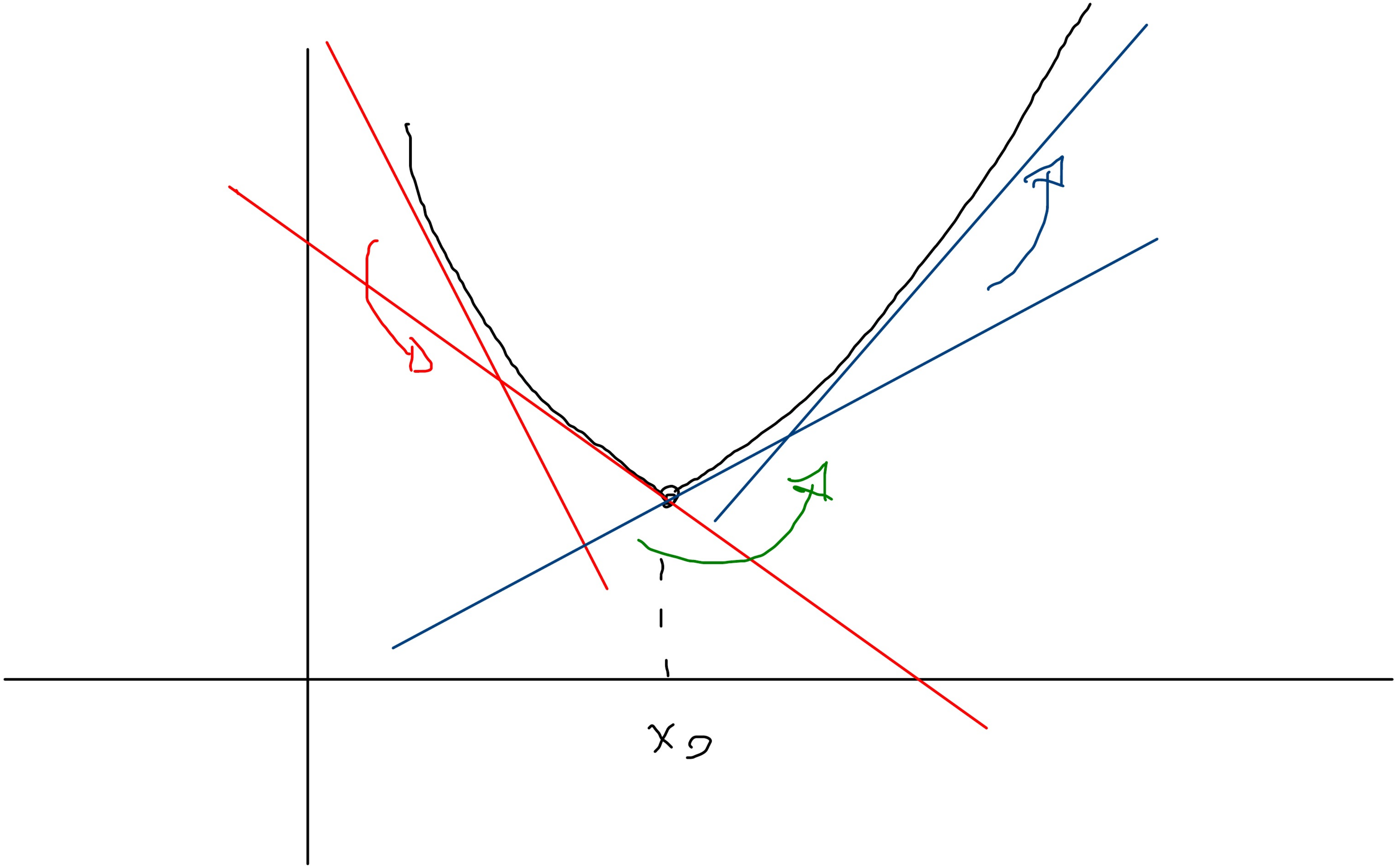
Siano $I_1 = \{x \in I \text{ t.c. } x < x_0\}$

$I_2 = \{x \in I : x > x_0\}$.

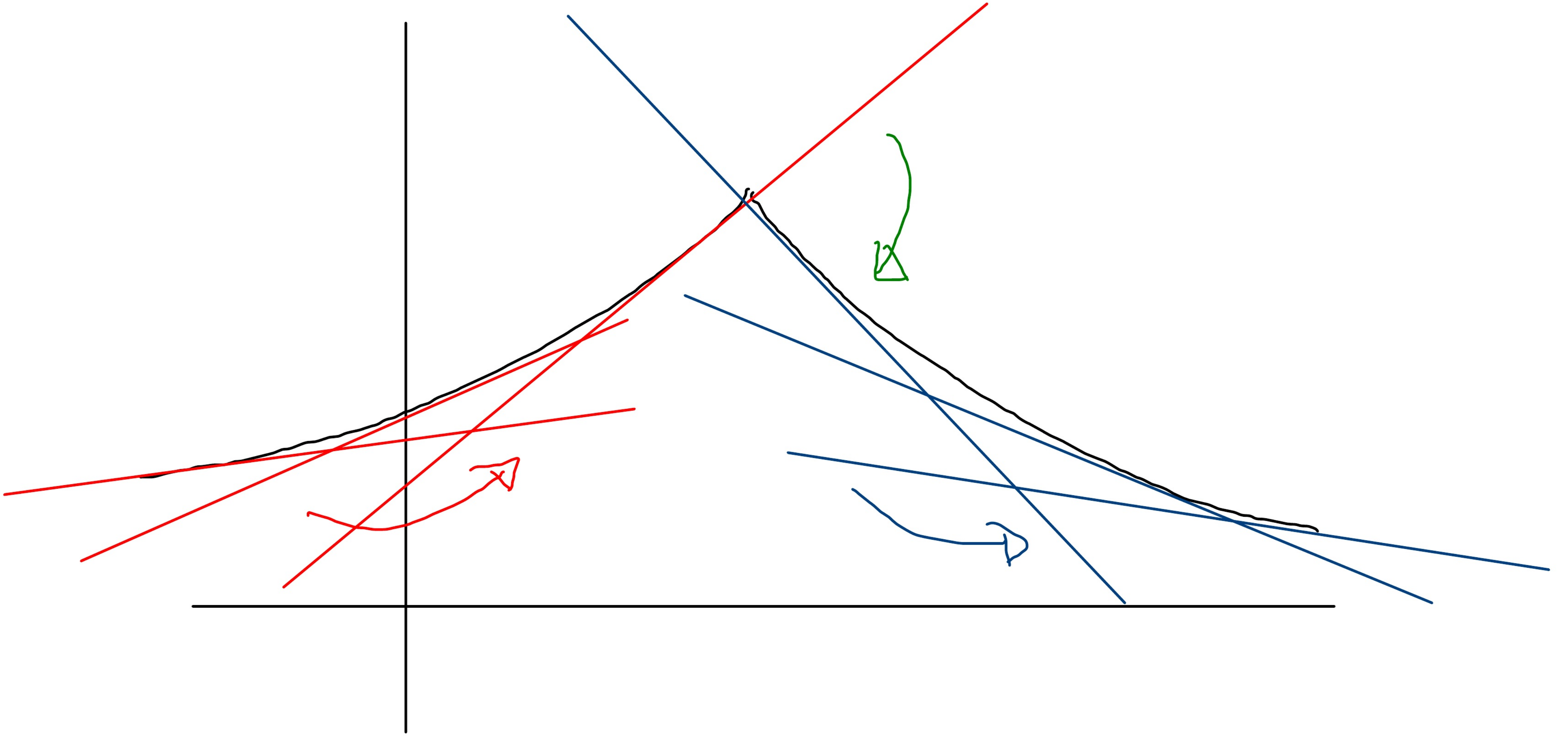
Se f è convessa in I_1 e I_2 e x_0 è un punto angoloso per f allora f è convessa in I se e solo se

$$f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0).$$





x_0



Flessi.

$\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

x_0 punto interno ad I si dice punto di flesso se f è derivabile in x_0 e esiste un intorno V di x_0 ($V \subset I$) t.c. la quantità

$$\frac{\overbrace{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)}^{g \qquad g'(x_0)=0}}{x-x_0}$$

Quanto si discosta il grafico di f dalla tangente $\to$

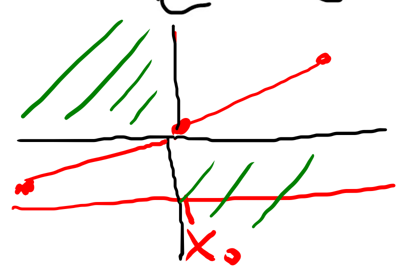
$\to$ resto del polinomio di Taylor in x_0 di ordine 1

SPEZZARE LA FRAZIONE

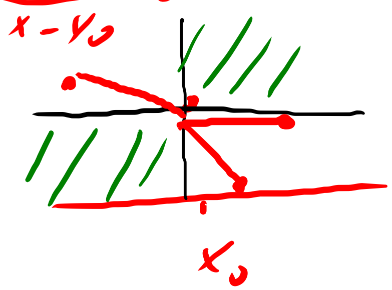
non cambia segno in $V \setminus \{x_0\}$.

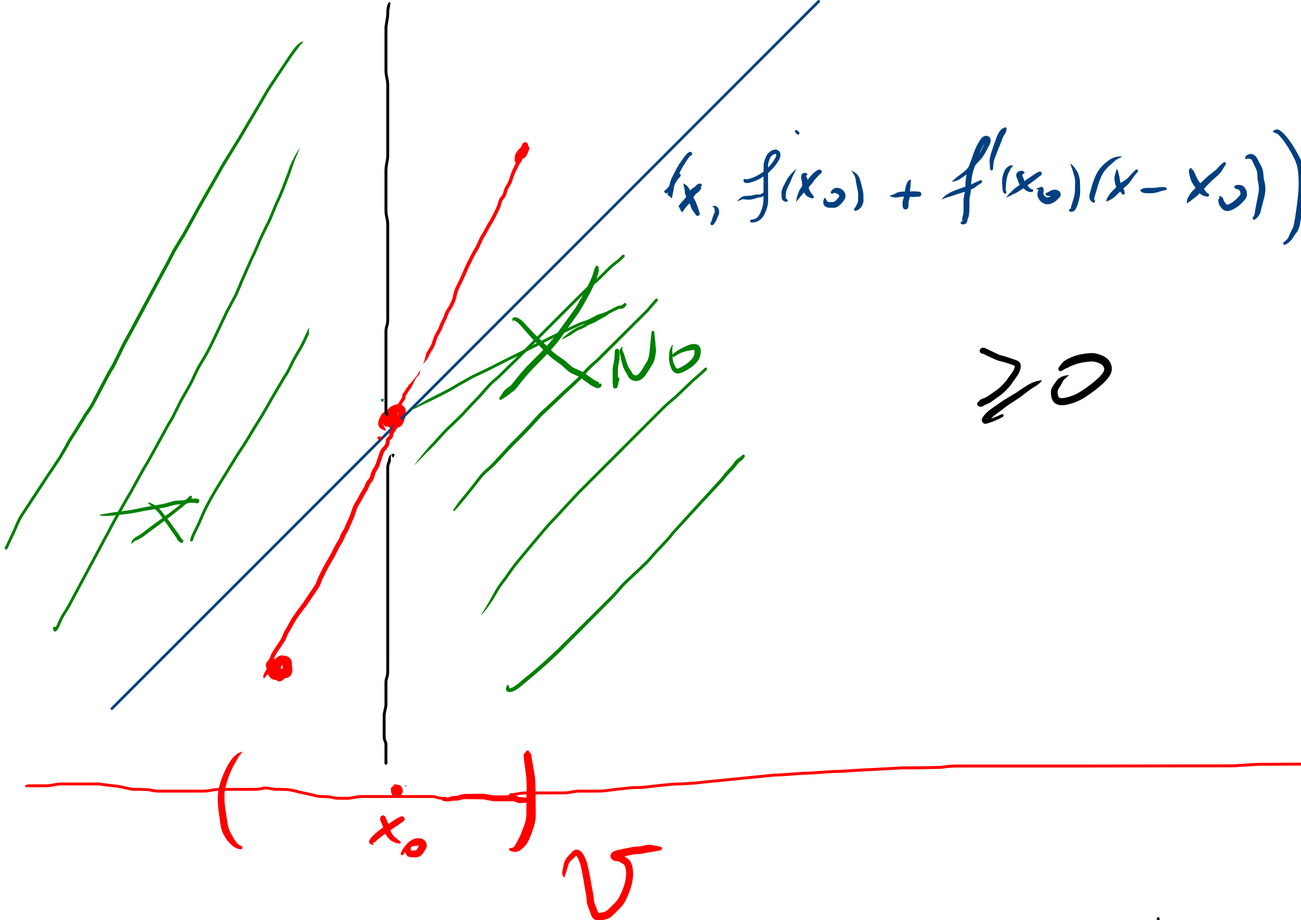
e.g. $f'(x_0)=0$

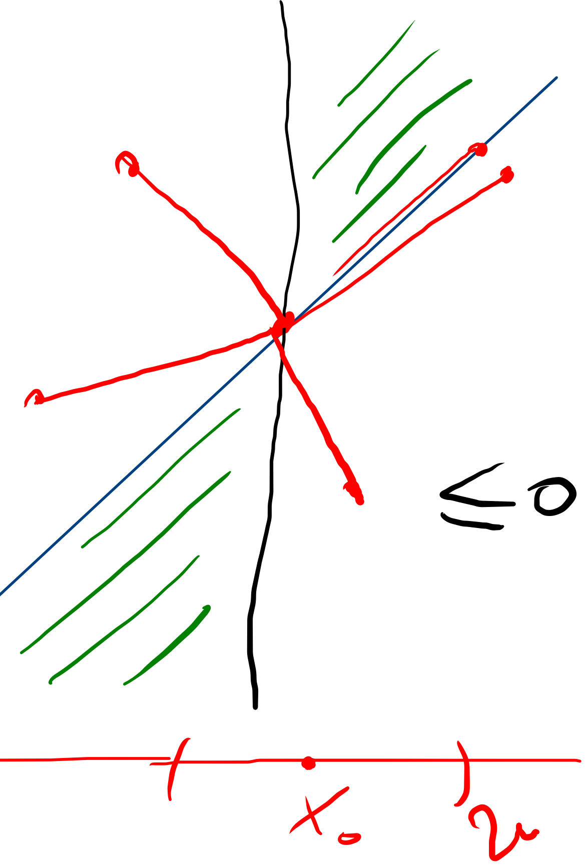
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$$

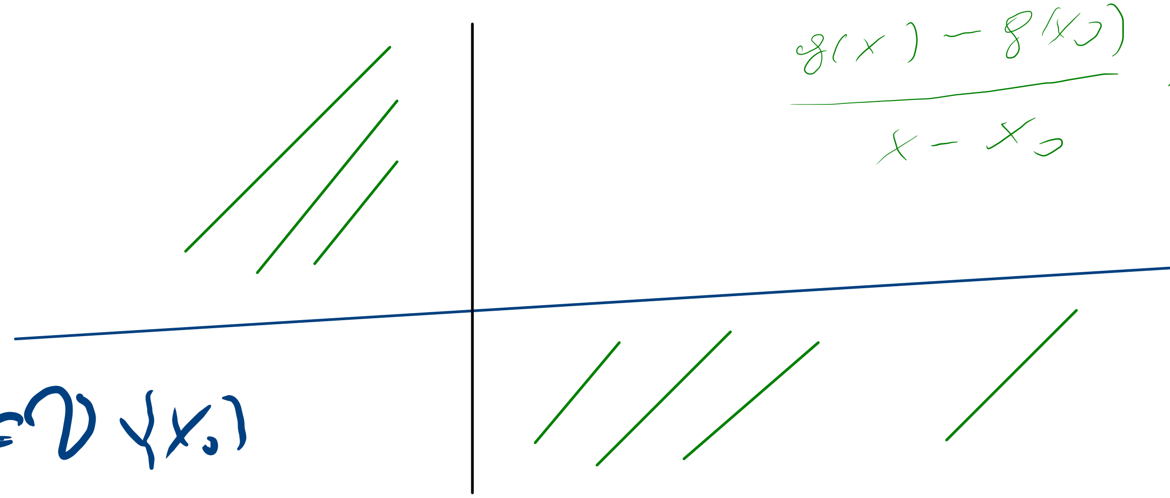


$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$$









$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} > 0$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-y_0} - f'(x_0) \geq 0 \quad (\leq)$$

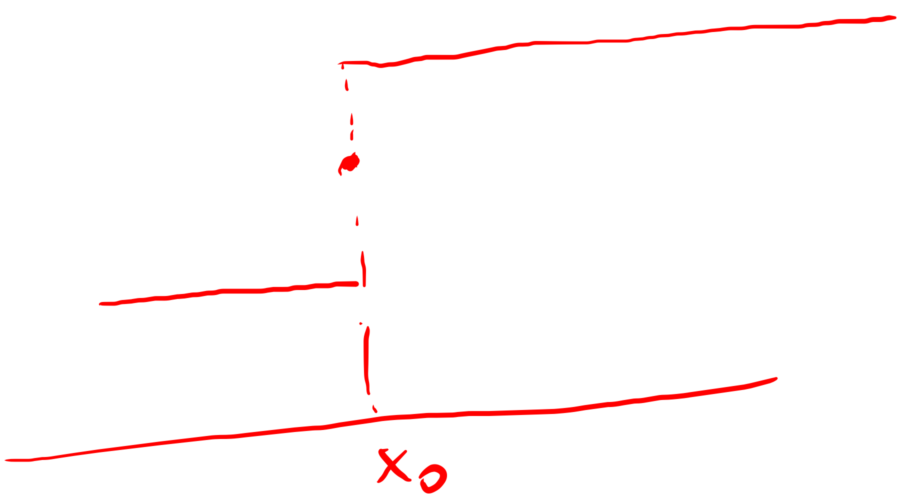
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'(x_0) \quad \forall x \in V \setminus \{x_0\} \quad (\leq)$$

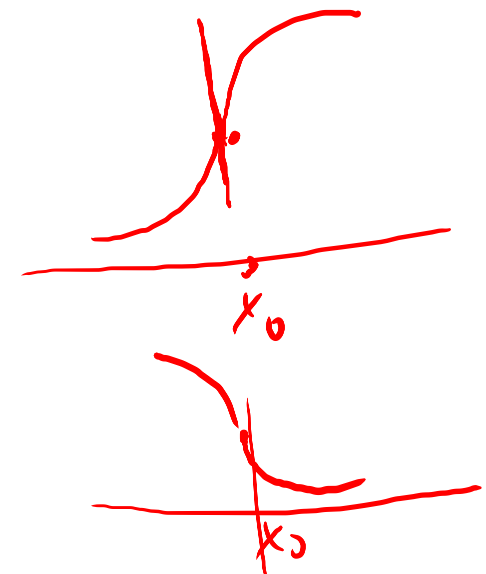
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$$

Se invece $\nexists f'(x_0) = \pm\infty$ (f non è derivabile)

e se f è convessa in un intorno destro di x_0 e concava in un intorno sinistro di x_0 (o viceversa) allora x_0 si dice punto di flesso a tangente verticale

f deve essere continua in x_0.

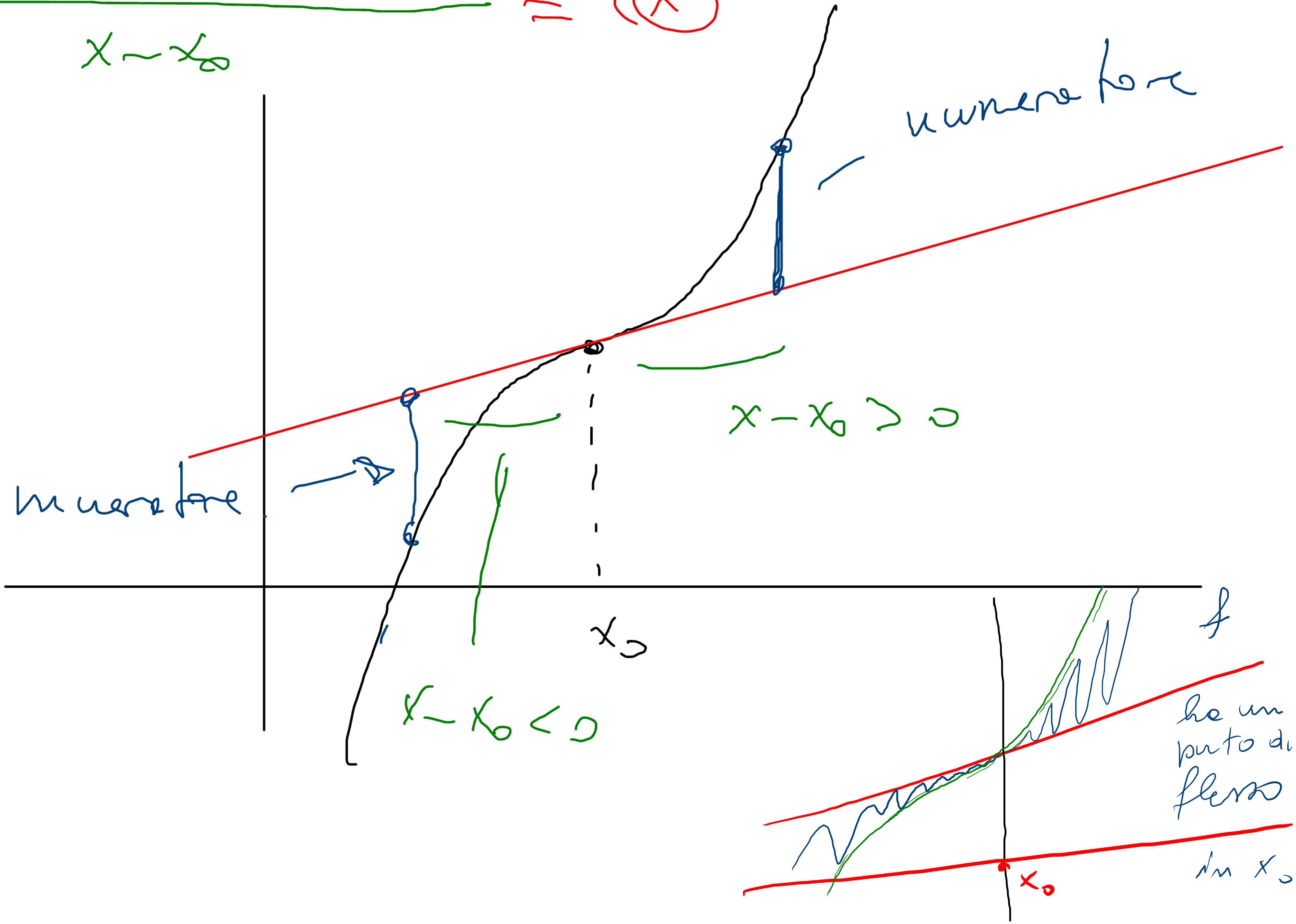




$f'(x_0) = +\infty$

$f(x) = \mathrm{sig}(x - x_0) + \text{costante}$

$$\frac{f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0} = (*)$$

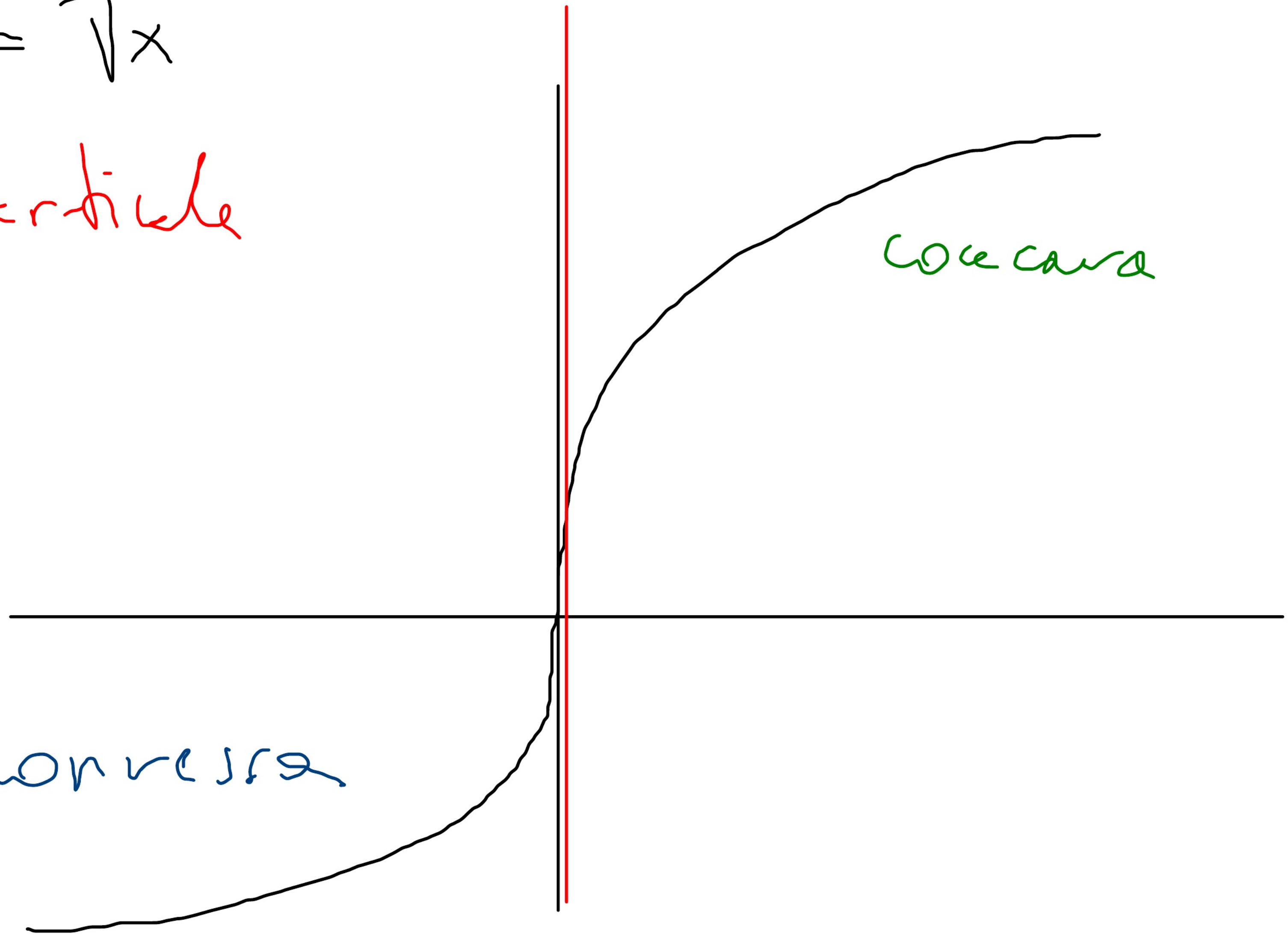


dire che * non cambia segno
vuol dire che la funzione passa
da sopra a sotto la tangente o
viceversa.

Es: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

tangente verticale

$f'(0) = +\infty$



$x \neq 0$

$f' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$f'' = -\frac{1}{3}\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$ > 0 $x < 0$

< 0 $x > 0$

Oss: se $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo e f derivabile due volte in I.

Allora se $f''(x_0) = 0$ e f "cambia segno" in x_0 allora x_0 è punto di flesso.

$f''(x) \leq 0$ se $x \leq x_0$ o viceversa

$f''(x) \geq 0$ se $x \geq x_0$

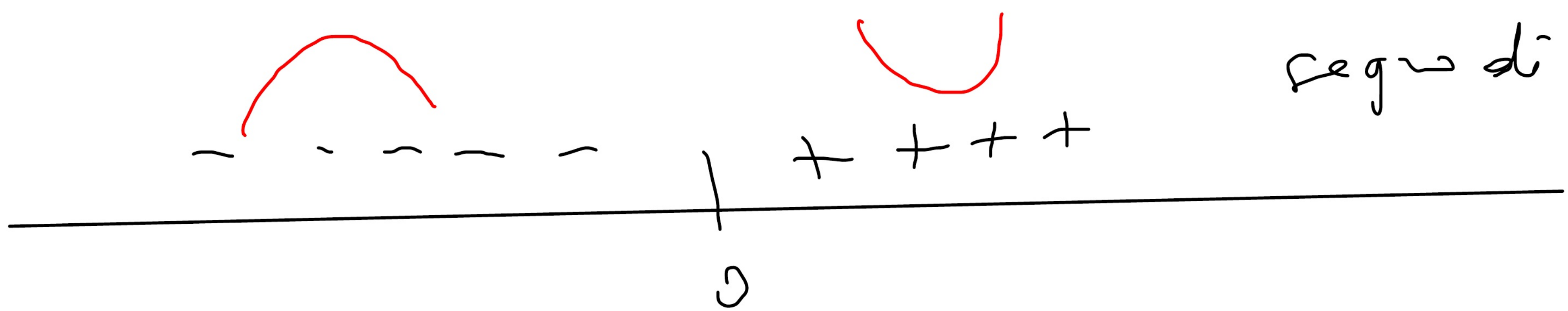
$x \in U$ intorno di x_0.

Resto di Lagr.

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{\cancel{x - x_0}} = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)$$

Es: $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$

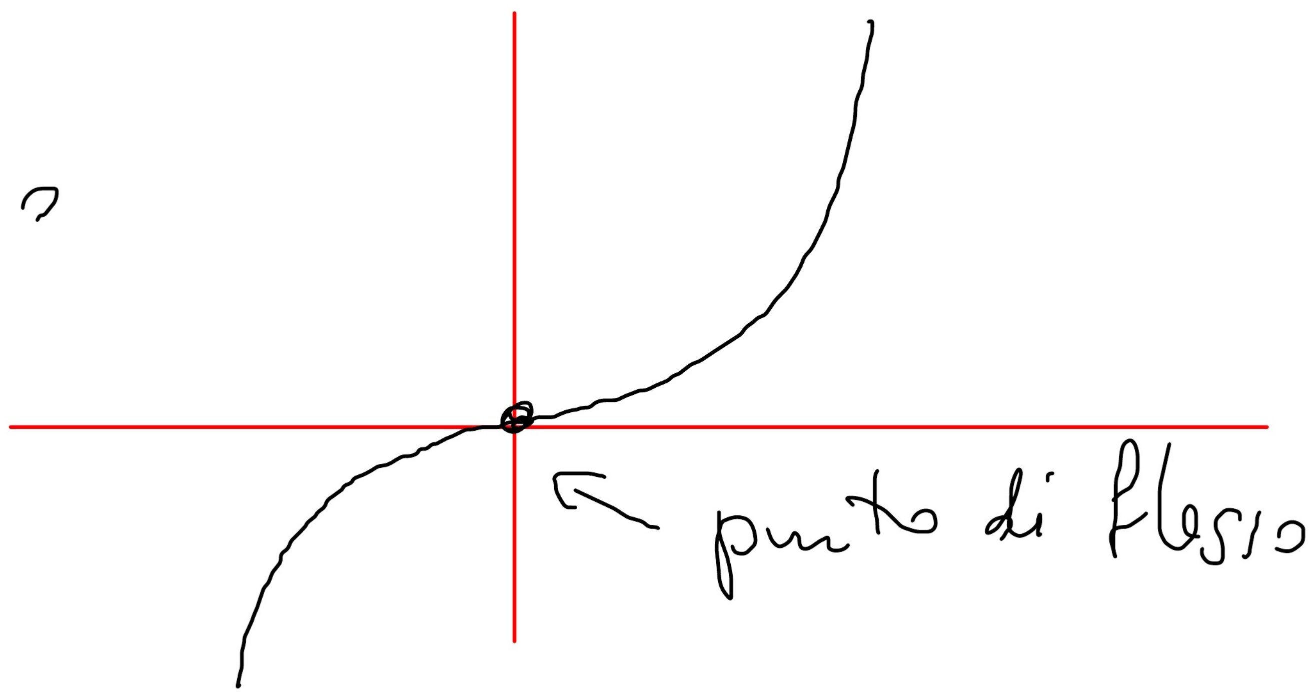
segno di f''



$f''(0) = 0$

$f''(x) \leq 0$ se $x \leq 0$

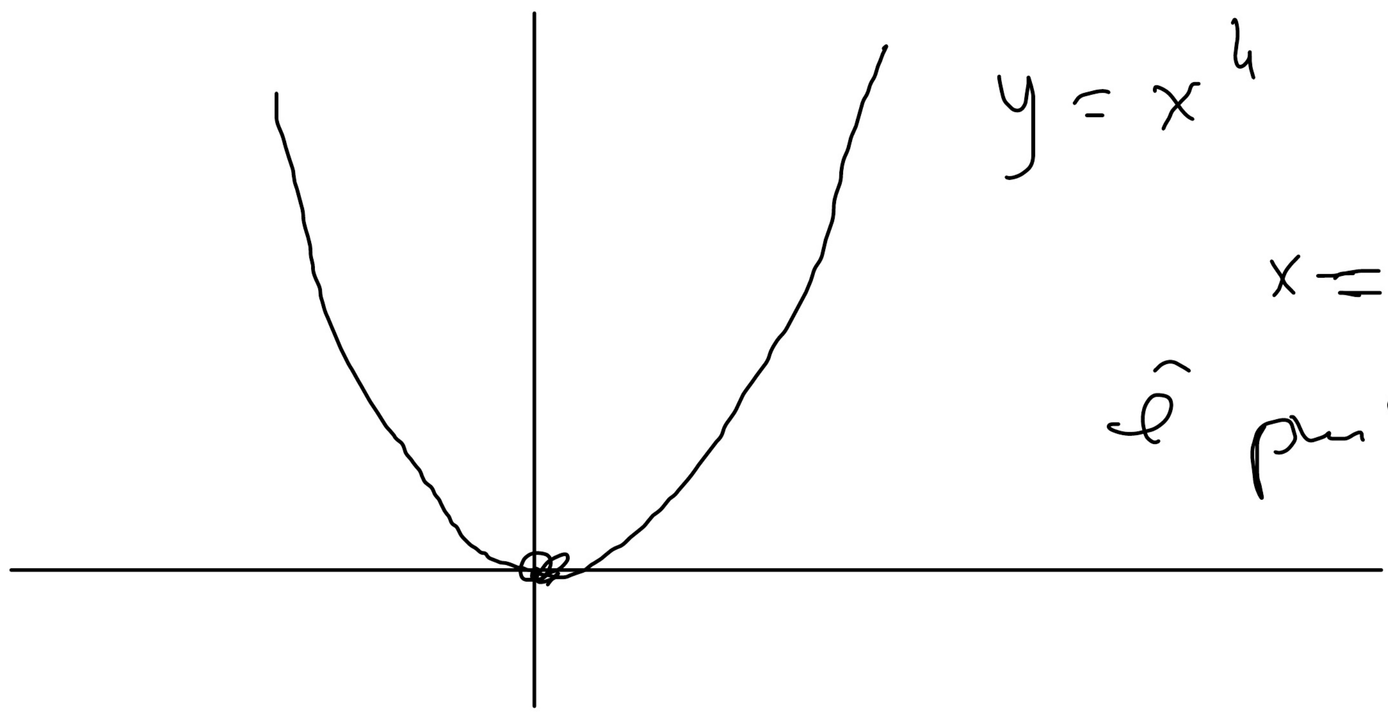
$f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.



Oss: $f''(x_0) = 0$ non è suff. per avere un flesso.

ES: $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$ $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ è convessa in $\mathbb{R}$



$y = x^4$

$x = 0$ non è punto di flesso.

Oss: ci possono essere punti di flesso dove non esiste la derivata seconda.

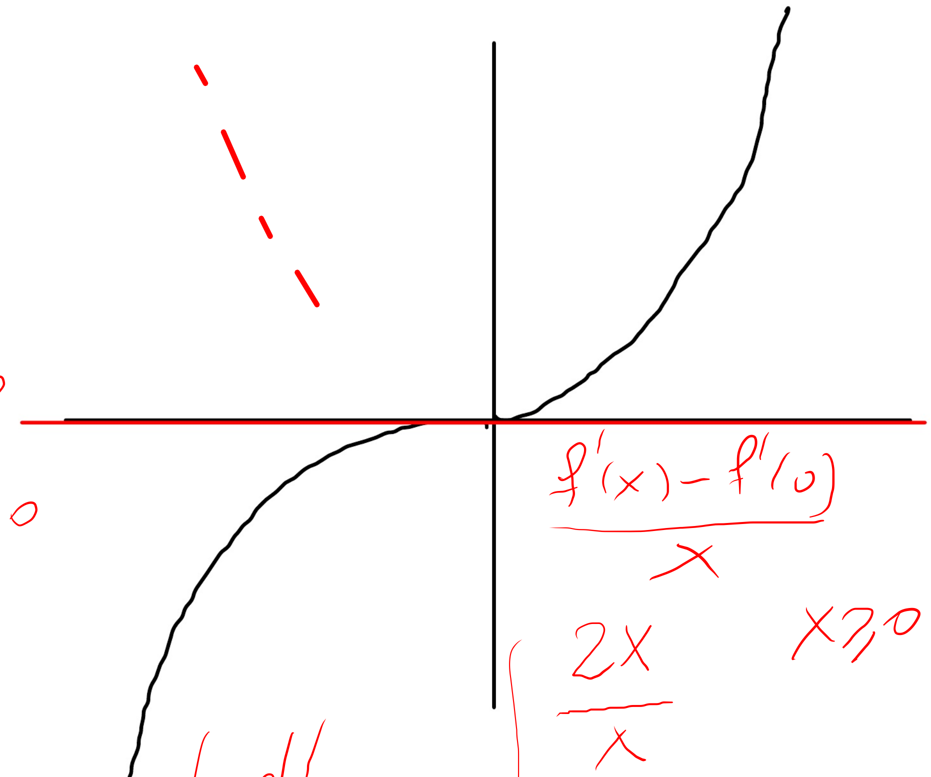
Es: $f(x) = x \cdot |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

f è deriv. per $x \neq 0$ $\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x \leq 0 \end{cases}$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \pm x \longrightarrow 0$$

$$\boxed{\exists f'(0) = 0}$$



$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} \quad \begin{cases} \dfrac{2x}{x} & x \geq 0 \\ -\dfrac{2x}{x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$\nexists f''(0)$

$x_0 = 0$ è punto di flesso. Infatti

$f'(x) = 2x$ se $x > 0$

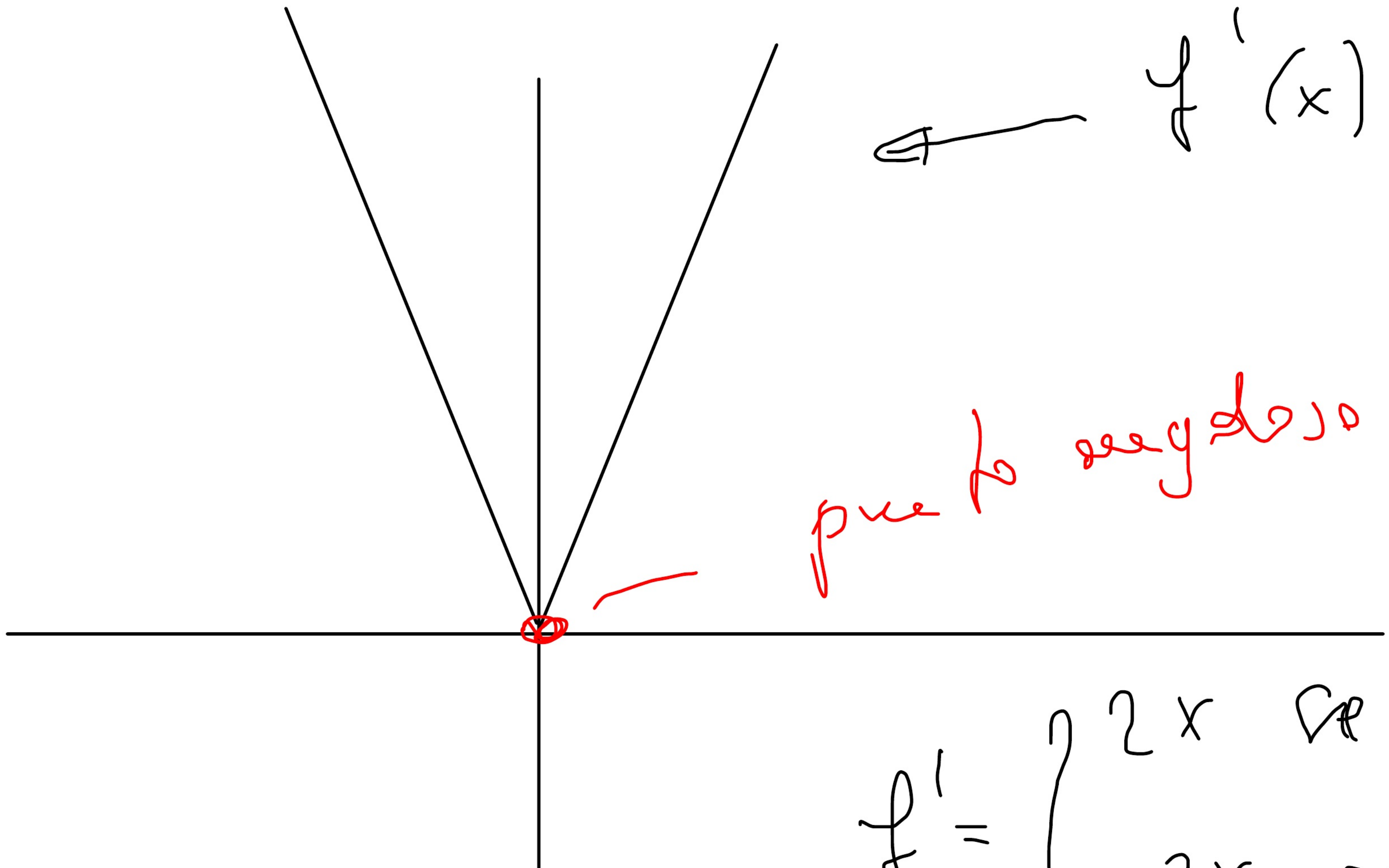
$f'(x) = -2x$ se $x < 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot |x| - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

retta tangente in $x = 0$ è $\boxed{y = 0}$

f passa da sotto a sopra la tangente in $x_0 = 0$.



$$f' = \begin{cases} 2x & \text{se } x \ge 0 \\ -2x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f' non è derivabile in $x_0 = 0$ $\Rightarrow$ $\nexists\, f''(0)$.

Oss: $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, f convessa nei punti interni di I, f continua in I $\Rightarrow$ f è convessa in I.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ convessa in (a,b)

f continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ f è convessa in $[a,b]$.

Studio di funzione

$f(x)$ viene assegnata senza specificare il dominio.

- determinare l'insieme di definizione di f
- LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO
- determinare l'insieme di continuità di f
- determinare l'insieme di derivabilità di f
  - dove ha derivata
  - ove è derivabile
- eventuali asintoti: orizzontali, verticali, obliqui
- monotonia della funzione
- punti di massimo, di minimo locali

- massimo e minimo di f oppure sup e inf.
- convessità di f (punti di flesso).

grafico
$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$
esercizio per casa

Studiare la funzione

$$f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x}.$$

Insieme di definizione.

$$|x|>0 \iff x \neq 0$$

$0 \notin \operatorname{dom} f$

Insieme di definizione è $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

La f è continua in tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

La f è derivabile in tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Asintoti

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$-\infty \qquad 0^- \; 0^+ \qquad +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ?$$

$$f(x) = \log|x| - \frac{x^2-1}{4x} = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$$

$+\infty \qquad +\infty \qquad 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log|-\infty| - \frac{-\infty}{4} + \frac{1}{4(-\infty)} =$$

$$= \log(\infty) + \infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \log|0^-| - \frac{0^-}{4} + \frac{1}{4\cdot(0^-)} = \log(0^+) - 0 - \infty$$

$-\infty \qquad 0 \qquad -\infty$

$$= -\infty - \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x} = \log|0^+| - \frac{0^+}{4} + \frac{1}{4\cdot 0^+} =$$

$\to 0$

$$= -\infty - 0 + \infty \quad \text{indeterminata.}$$

$= x, \; x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{4}\right) + \lim_{x\to 0^+} \log|x| + \frac{1}{4x} =$$

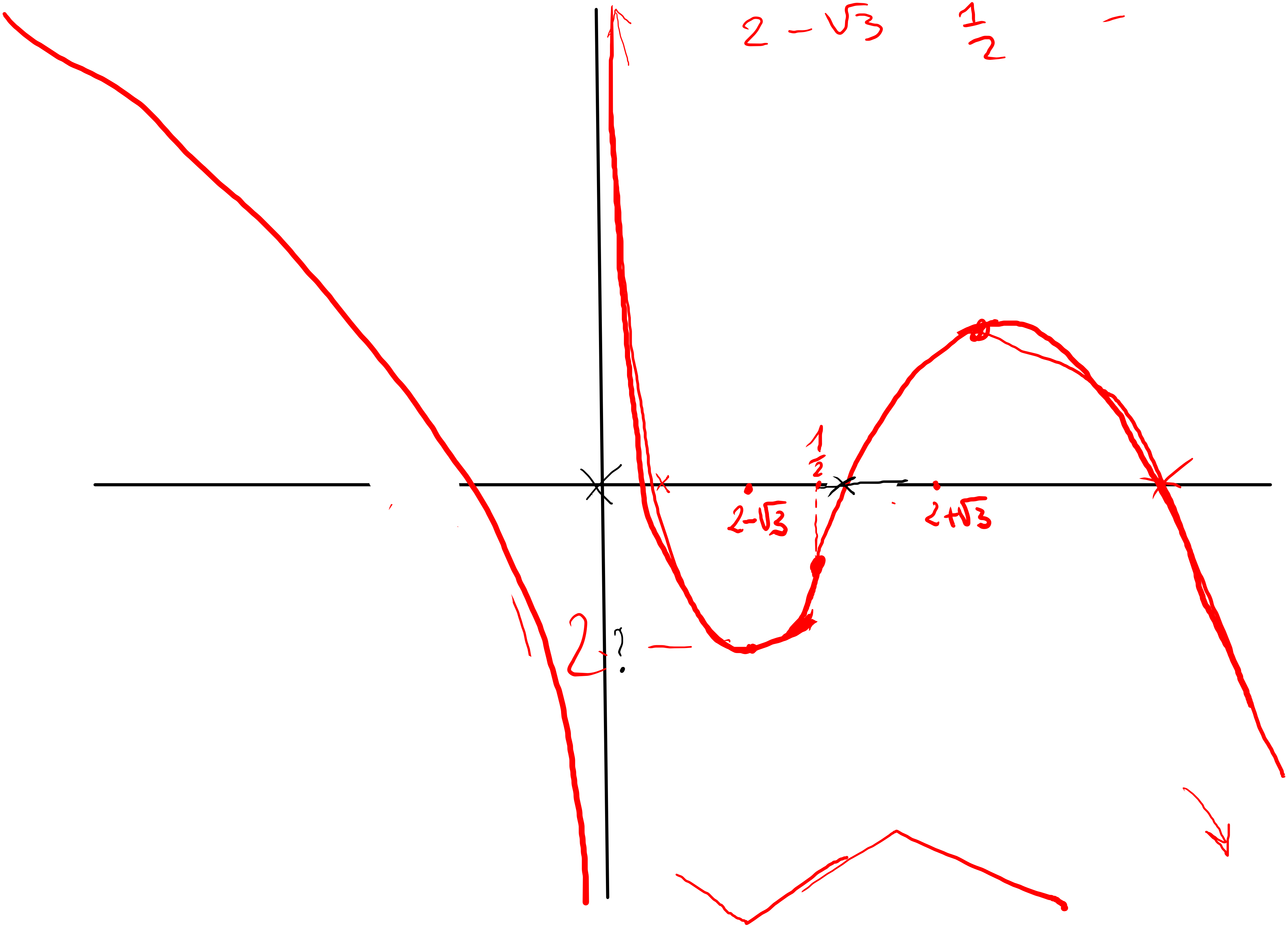
$$= 0 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\boxed{4x\log x} + 1}{4x} = 0 + \frac{0+1}{4\cdot 0^+} = +\infty$$

$\to 0$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \log|\infty| - \frac{\infty}{4} + \frac{1}{4\cdot\infty} = \infty - \infty + 0 = ?$$

$\to 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\log|x|}{x} - \frac{1}{4}\right) + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x} = \infty\left(0 - \frac{1}{4}\right) + 0 = -\infty$$



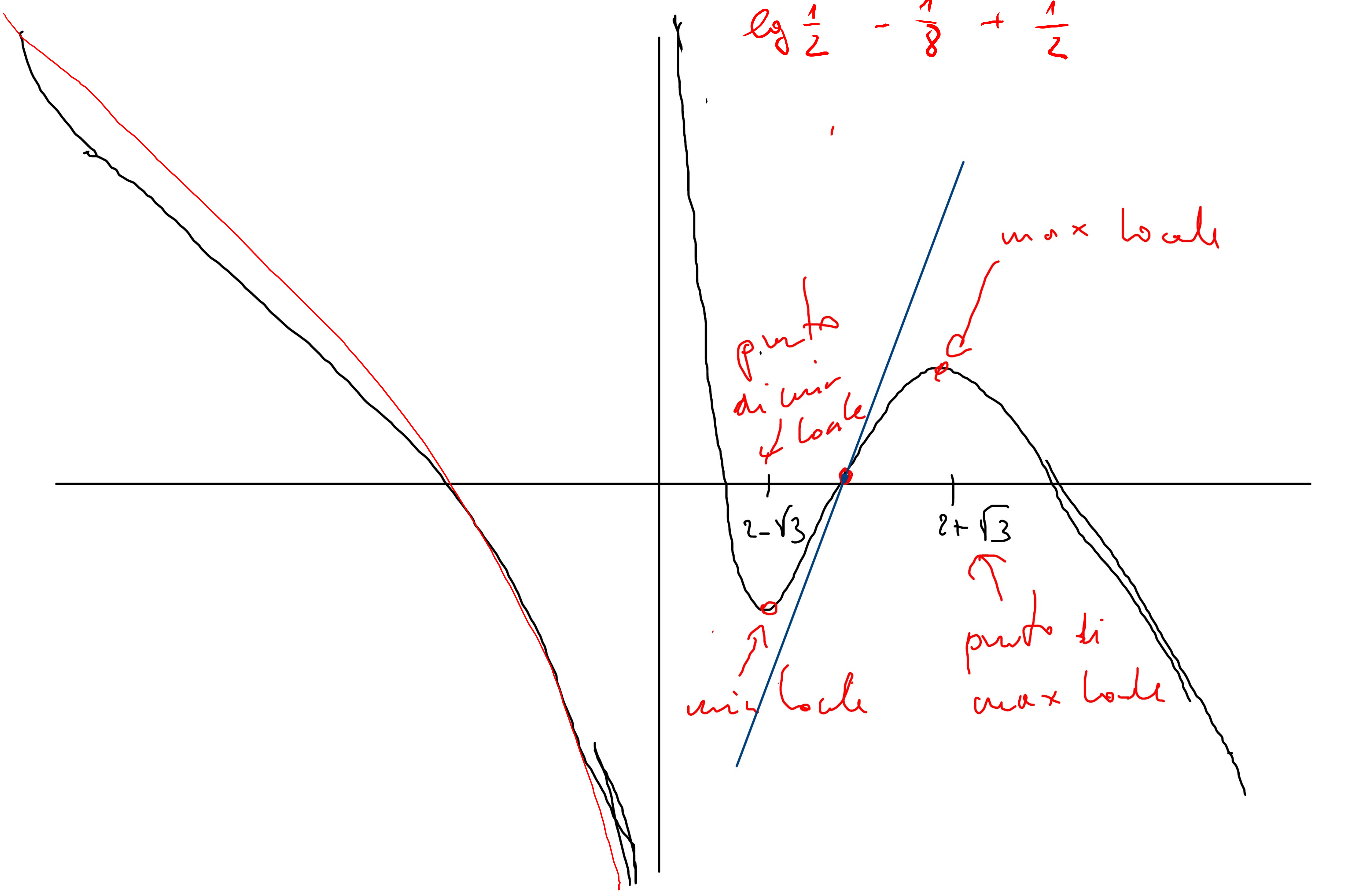
$2-\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$2-\sqrt{3}$
$2+\sqrt{3}$
2?

Il segno di f risulta
problematico

così come i suoi zeri

Si cerca di capire grazie
alle monotonie

e al segno dei valori
di max e min relativi


$\lg \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}$
max locale
punto di min locale
$2-\sqrt{3}$
$2+\sqrt{3}$
min locale
punto di max locale
max locale

Asintoto verticale di equazione $x=0$

Nessun asintoto orizzontale.

$$\frac{\log|x|}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Asintoti obliqui?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}\right)\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log|x|}{x} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^2} = 0 - \frac{1}{4} + 0 = m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \log|x| - \cancel{\frac{x}{4}} + \frac{1}{4x} + \cancel{\frac{1}{4}\cdot x} =$$

$$= \infty + 0 = +\infty$$

non c'è asintoto obliquo per $x \to +\infty$
e neanche per $x \to -\infty$ perché i conti
sono uguali.

Dal fatto che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ otteniamo
che $\sup(f) = +\infty \Rightarrow f$ non ha massimo
Dal fatto che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ otteniamo
che $\inf(f) = -\infty \Rightarrow f$ non ha minimo.

illimitata sup ed inf

Monotonia di f

$$D(\log|x|)$$

$$\log|x| = \begin{cases} \log x & \text{se } x > 0 \\ \log(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} D(\log x) = \dfrac{1}{x} \\ D(\log(-x)) = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$D(\log|x|) = \frac{1}{x}.$$

$$f(x) = \log|x| - \frac{x}{4} + \frac{1}{4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x - x^2 - 1}{4x^2} = \frac{-x^2+4x-1}{4x^2}$$

segno di f'.

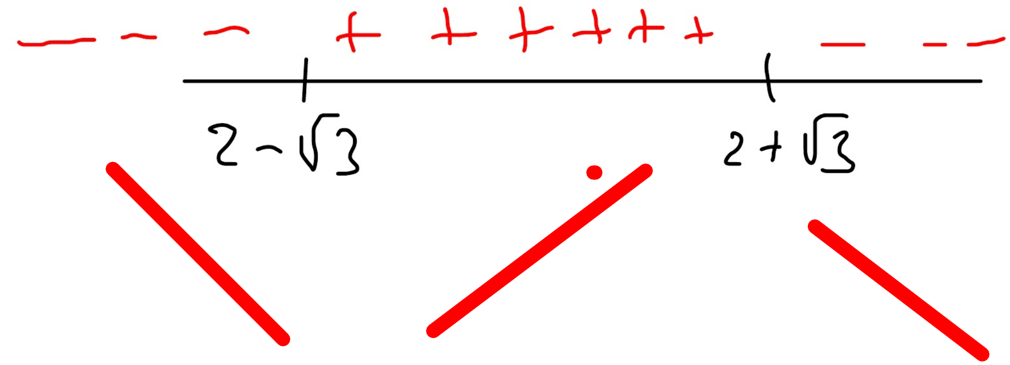
Il denominatore è > 0 in tutto il dominio.

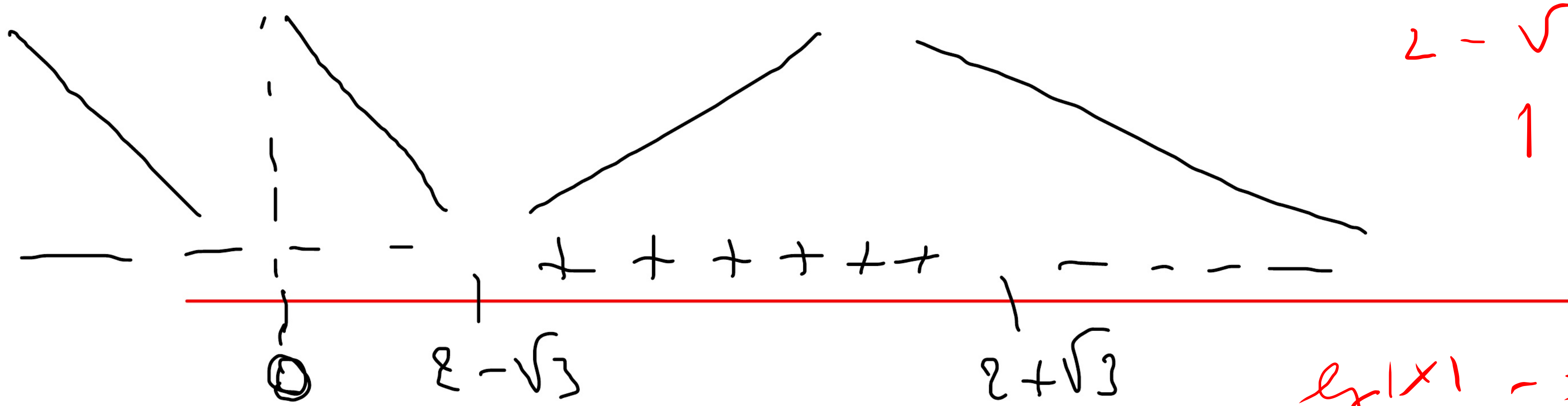
Allora il segno di f' è lo stesso del numeratore.

$$-x^2+4x-1=0 \iff x^2-4x+1=0$$

segno di f'

$$x = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$





$2-\sqrt{3} < 1$

$1 < \sqrt{3}$

$\log|x| - \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$

f è decrescente in $(-\infty, 0)$

decrescente in $(0, 2-\sqrt{3}]$

crescente in $[2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

decrescente in $[2+\sqrt{3}, +\infty)$.

$x = 2-\sqrt{3}$ è punto di minimo locale

$x = 2+\sqrt{3}$ è punto di max locale.

$f(2-\sqrt{3}) =$

$= \underset{<0}{\log(2-\sqrt{3})} - \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

$= \quad ? \quad \cancel{<0} \; >0 \; \checkmark$

$-\frac{2-\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{2-\sqrt{3}} > 0$

$\frac{4}{2-\sqrt{3}} \qquad \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$16 > 4+3-4\sqrt{3}$

$f(2+\sqrt{3}) = \underset{>0}{\log(2+\sqrt{3})} - \frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{2+\sqrt{3}} > 0$

$$\log(2+\sqrt{3}) - \frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{(2+\sqrt{3})}$$

$$- \frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{4}{2+\sqrt{3}} > 0$$

$$16 > (2+\sqrt{3})^2$$

$$16 > 4 + 4\sqrt{3} + 3$$

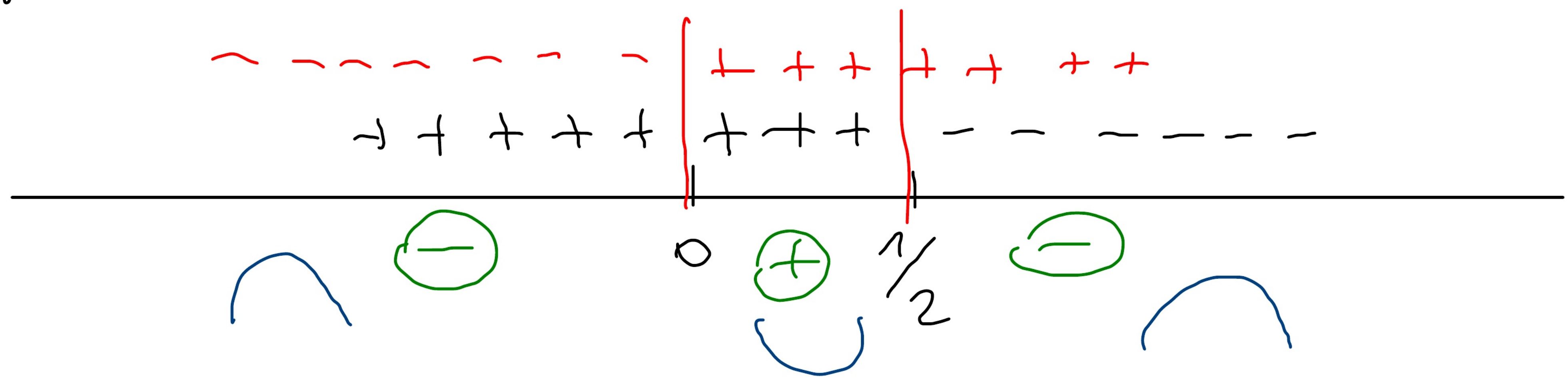
Convessità

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} \qquad D(x^{-2}) = -2x^{-3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} = \frac{-2x+1}{2x^3} \qquad \text{segno?}$$

segno numeratore $-2x+1>0 \iff 1>2x \iff x<\frac{1}{2}$

segno denominatore $2x^3>0 \iff x>0$



f è concava in $(-\infty, 0)$

convessa in $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

concava in $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Il punto di ascissa $x = \frac{1}{2}$ è di flesso.