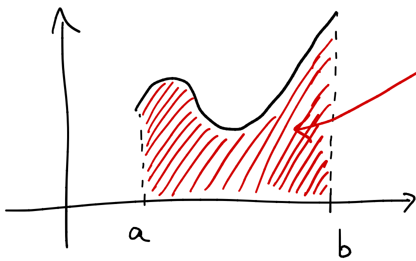
Integrali (di Riemann)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, limitata (ad esempio f continua)

Idea: l'integrale (definito) di $f(x)$ su $[a,b]$ rappresenta l'area del sottografico di f

(se $f \geq 0$ su $[a,b]$)

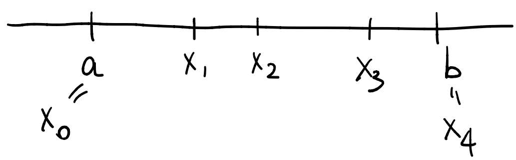


Def: una suddivisione di $[a,b]$ è un insieme

$$A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ con}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

(esempio

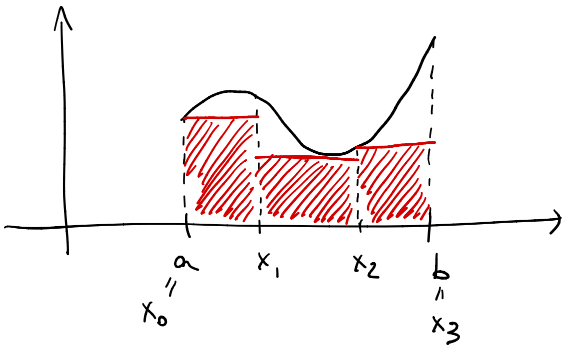


$n = 4$)

Oss
- le lunghezze di $[x_{i-1}, x_i]$ non sono necessariamente uguali.
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a =$ lunghezza di $[a,b]$.

Def: $$S'(f,A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

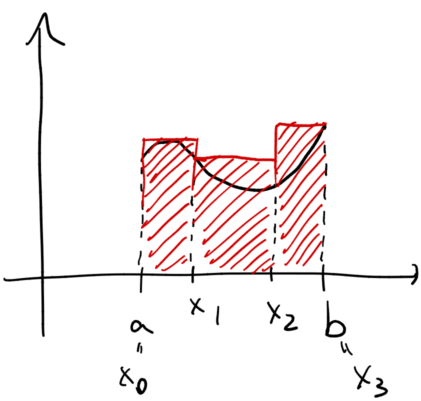
si dice somma inferiore di f relativa alla suddivisione A.



È la somma delle aree dei rettangoli rossi.
Approssima l'area del sottografico per difetto.

Def: $$S''(f,A) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

si dice somma superiore di f relativa ad A



Somma delle aree dei rettangoli rossi.

È un'approssimazione per eccesso dell'area del sottografico.

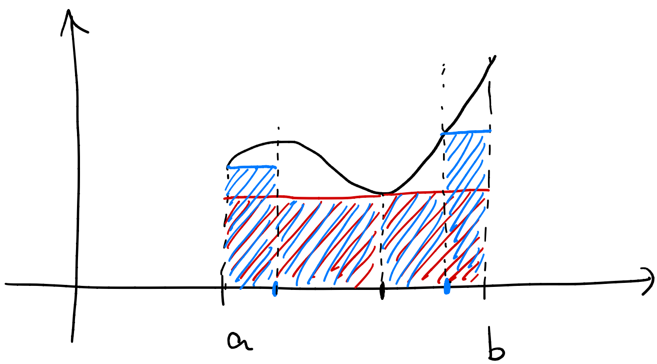
Oss: non serve che f sia continua, ma soltanto limitata.

Def: $S'(f) = \sup \{ S'(f, A) \mid A \text{ suddivisione di } [a,b] \}$

$S''(f) = \inf \{ S''(f, A) \mid A \text{ " " " } \}$

$S'(f)$ si dice <u>somma inferiore</u> di f

$S''(f)$ " " <u>" superiore</u> di f

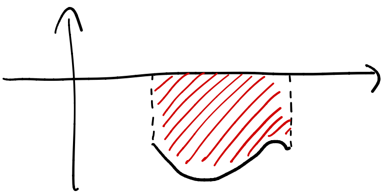


Aggiungendo punti, le somme inferiori crescono.
(e le somme superiori calano)

Def: Se $S'(f) = S''(f)$ si dice che f è <u>integrabile secondo Riemann</u> su $[a,b]$ e il valore comune si dice integrale di f su $[a,b]$ e si indica

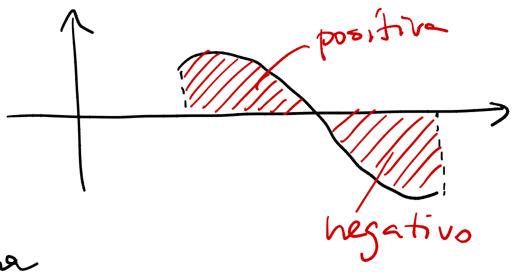
con $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= S'(f) = S''(f) \right)$

Oss: questa def. ha senso anche quando f può prendere valori negativi.



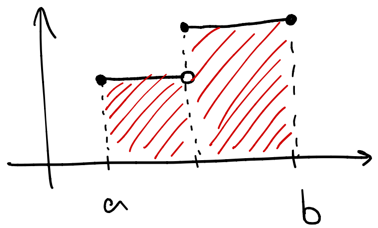
se $f \leq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$ ed è l'opposto dell'area in figura.

In generale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è la somma algebrica delle aree in figura.



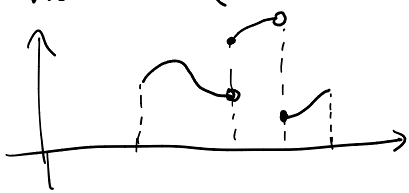
Teorema: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

Oss: ci sono anche funzioni non continue che sono integrabili, ad esempio

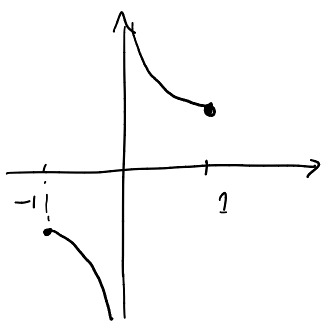


è integrabile ma non è continua.

Def: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ è generalmente continua se è limitata e ha eventualmente un numero finito di punti di discontinuità.



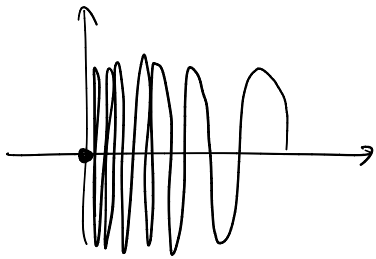
Esempio: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad f:[-1,1] \to \mathbb{R}$



C'è un solo punto di discontinuità, ma f non è limitata
$\Rightarrow$ non è generalmente continua.

Teorema: se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ generalmente continua, allora f è integrabile.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R}$

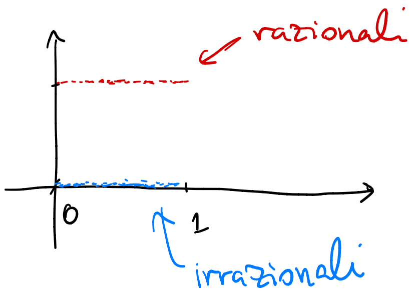


$f(x)$ non e' continua, ma e' generalmente continua $\Longrightarrow$ integrabile.

Esempio di una funzione non integrabile

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

funzione di Dirichlet



Per qualsiasi $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [0,1]$ si ha

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1 \quad \text{e}$$

$$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$$

Segue che $s'(f, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall \mathcal{A}$ suddivisione di $[0,1]$

$\Longrightarrow s'(f) = 0.$

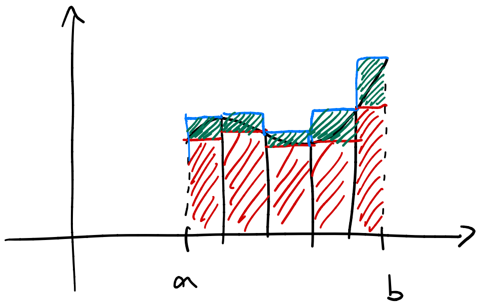
e $s''(f, \mathcal{A}) = 1 \quad \forall \mathcal{A}$ " " "

$\Longrightarrow s''(f) = 1$

Quindi $S'(f) \neq S''(f) \Rightarrow f$ non è integrabile.

Se f è integrabile, $\underbrace{S''(f,A) - S'(f,A)}$ "tende a 0" al raffinarsi della suddivisione.

area della regione verde.



Teorema: siano f, g integrabili su $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$.

Allora: $f+g$, $k \cdot f$, $|f|$ sono integrabili, e si ha:

1) $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b (k \cdot f)(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

3) se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

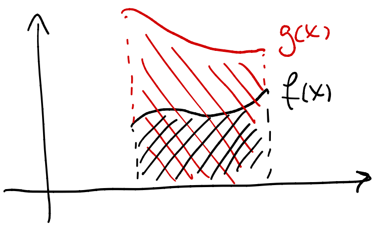
4) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

5) Se $a < c < b$ allora

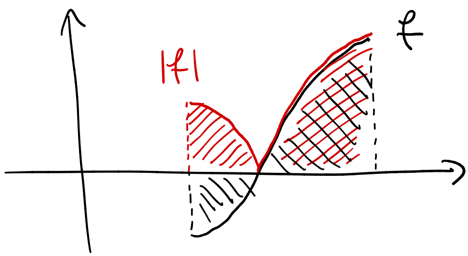
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

---

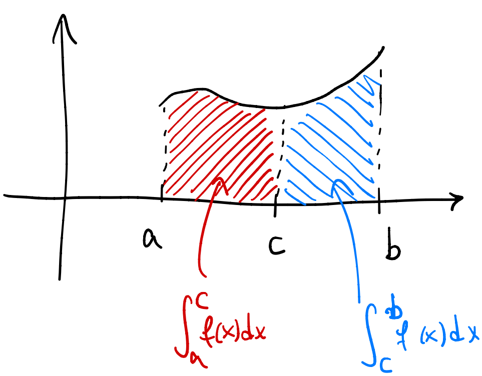
3) :



4) :



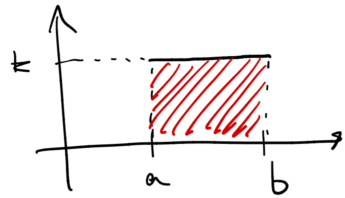
5):



Oss: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è costante, cioè

$f(x)=k \quad \forall x\in[a,b]$, allora

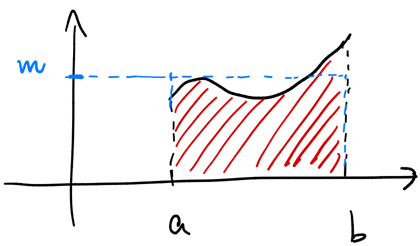
$$\int_a^b f(x)\,dx = k\cdot(b-a)$$



Def: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile,

si dice media integrale di f su $[a,b]$

$$m=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$



Graficamente, m è l'altezza di un rettangolo di base $b-a$, con la stessa area del sottografico di f.

Teorema (della media integrale):

sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile, allora

$$\inf_{[a,b]} f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f(x)$$

Se f è continua, allora $\exists\, z\in[a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Dim: $\forall x \in [a,b]$ abbiamo

$$\inf_{[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f(x)$$

integriamo questa disuguaglianza (usando le proprietà 3) del Teorema)

e otteniamo

$$\int_a^b \underbrace{\left(\inf_{[a,b]} f(x)\right)}\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \underbrace{\left(\sup_{[a,b]} f(x)\right)}\,dx$$

Sono costanti

$$\Longrightarrow \left(\inf_{[a,b]} f(x)\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \left(\sup_{[a,b]} f(x)\right)(b-a)$$

dividendo per b-a ottengo proprio

$$\inf_{[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f(x).$$

Se f è continua, allora $\inf(f) = \min(f)$ e $\sup(f) = \max(f)$ (per Weierstrass) e f prende tutti i valori compresi tra $\min(f)$ e $\max(f)$.

La media integrale e' un tale valore per quanto visto, quindi $\exists z \in [a,b]$ t.c. $f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

$\blacksquare$

<u>Oss</u>: se $b<a$, definiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

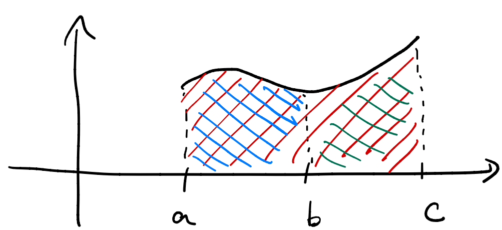
e definiamo anche $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Esempio: $\int_2^1 x^3\,dx = -\int_1^2 x^3\,dx$

<u>Domanda</u>: $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{} = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{}$ ← estremi nell'ordine sbagliato

vale se $a<b<c$? Sì

Infatti:



mi sto chiedendo se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

cioe' se $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

e questo e' vero per il Teorema visto (in questo caso i punti sono nell'ordine giusto).

<u>Oss</u>: la media integrale ha senso anche quando gli estremi sono scambiati:

se $b<a$, allora $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(-\int_b^a f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

<u>Def</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ <u>intervallo</u>, $f: I \to \mathbb{R}$.

Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u> di f se F e' derivabile in I

e vale $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

<u>Esempio</u>: $f(x) = 2x$. Una primitiva è $F(x) = x^2$.

Non è l'unica primitiva: $G(x) = x^2 + k$
$k \in \mathbb{R}$

ho comunque $G'(x) = 2x + 0 = f(x)$

quindi queste funzioni sono tutte primitive di $f(x) = 2x$.

- - - - - - - - - - -

In generale, se F è primitiva di f, tutte le funzioni $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

sono pure primitive di $f(x)$.

<u>Oss</u>: in effetti due primitive di $f(x)$ differiscono sempre per una costante.

<u>Dim</u>: siano F e G due primitive di f.

Allora ho che $F' = f$, $G' = f$.

Quindi $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$

Visto che siamo su un intervallo, concludo che $F - G$ è costante $= k \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in I.$$

$\blacksquare$

Def: l'integrale <u>indefinito</u> di $f(x)$

l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$.

Si indica con $\int f(x)dx$. (senza gli estremi)

Oss: $\int f(x)dx$ non indica una singola funzione, ma un insieme di funzioni

$$\int f(x)dx = \{ F : I \to \mathbb{R} \mid F \text{ derivabile e } F' = f \}$$

Es: $\int 2x\,dx = \{ x^2 + k \mid k \in \mathbb{R} \}$

di solito si abbrevia scrivendo

$$\int 2x\,dx = x^2 + k$$

L'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)dx$ invece è un numero reale, e rappresenta l'area del sottografico di f, e si dice <u>integrale definito</u>

a, b = <u>estremi di integrazione</u>.

inferiore superiore.

Dalle formule per le derivate seguono formule per le primitive

Esempio:

- $\int e^x dx = e^x + k$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + k$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$
- $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + k$

infatti: se $x > 0$ $\quad (\log x)' = \frac{1}{x}$

se $x < 0$ ho $|x| = -x$, e

$$(\log(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + k$

se $n \in \mathbb{Z}$, e $n \neq -1$

Es: $\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + k$

- più in generale, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$

per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$