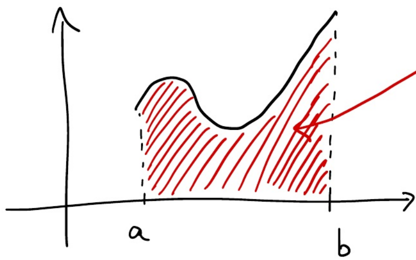
Integrali (di Riemann)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, limitata (ad esempio f continua), $a \leq b$

Idea: l'integrale (definito) di $f(x)$ su $[a,b]$ intuitivamente rappresenta l'area del sottografico di f (se $f \geq 0$ su $[a,b]$)

intragrafico di f e 0



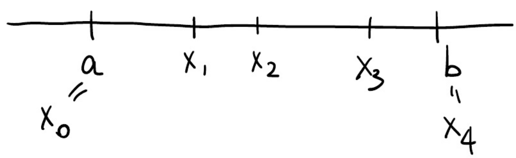
Sarà quindi la nostra definizione di area!

Def: una suddivisione di $[a,b]$ è un insieme

$$A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \text{ con}$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

(esempio



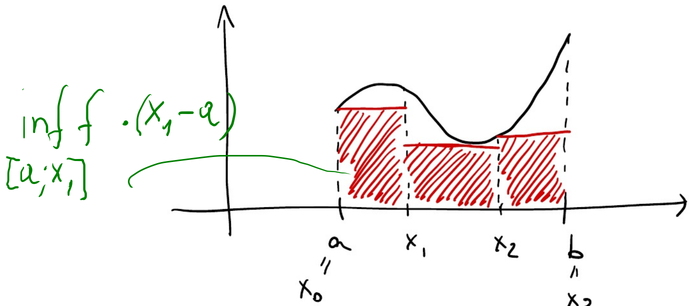
$n = 4$)

Oss • le lunghezze di $[x_{i-1}, x_i]$ non sono necessariamente uguali. $\rightarrow x_i - x_{i-1}$

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a =$ lunghezza di $[a,b]$.

Def: $$S'(f,A)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)}_{\text{altezze rettangoli}}\Big)\cdot\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{\text{basi rettangoli}}$$

si dice <u>somma inferiore</u> di f relativa alla suddivisione A.

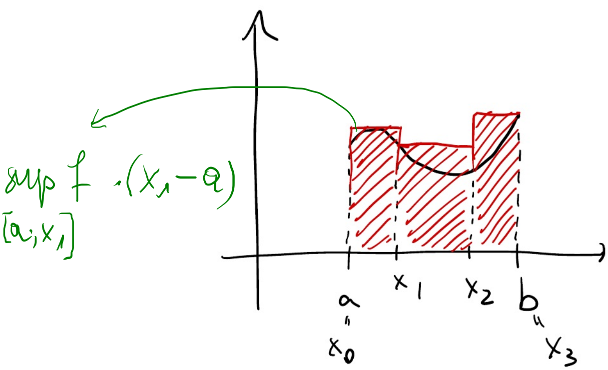


È la somma delle aree dei rettangoli rossi.

Approssima l'area del sottografico per difetto.

Def: $$S''(f,A)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)\cdot(x_i-x_{i-1})$$

si dice <u>somma superiore</u> di f relativa ad A



Somma delle aree dei rettangoli rossi.

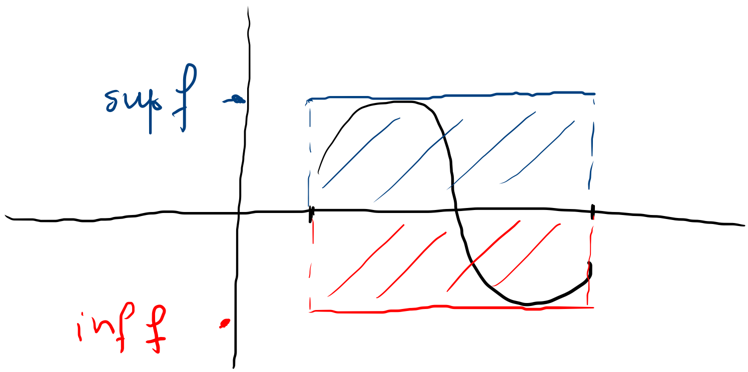
È un'approssimazione per eccesso dell'area del sottografico.

Esempi

$$\mathcal{P} = \{ x_0 = a \, , \quad x_1 = b \} \qquad a < b$$

$$S'(f, \mathcal{P}) = \inf_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$

$$S''(f, \mathcal{P}) = \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a)$$



Oss: non serve che f sia continua, ma soltanto limitata.

Def: $S'(f) = \sup\{ S'(f,A) \mid A$ suddivisione di $[a,b]\}$

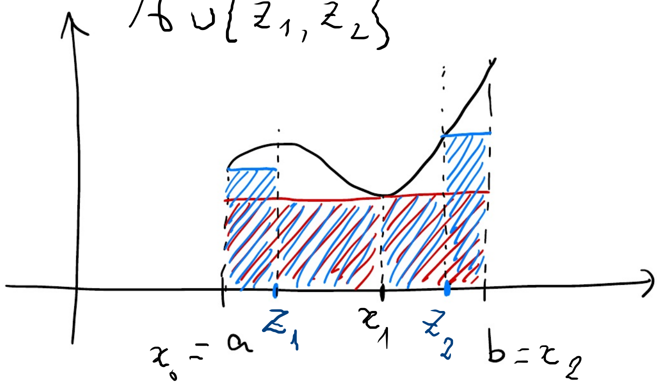
$S''(f) = \inf\{ S''(f,A) \mid A$ " " " $\}$

$S'(f)$ si dice ~~somma~~ integrale inferiore di f

$S''(f)$ " " ~~"~~ integrale superiore di f

$A = \{x_0, x_1, x_2\}$

$A \cup \{z_1, z_2\}$



Aggiungendo punti, le somme inferiori crescono. (e le somme superiori calano)

Def: Se $S'(f) = S''(f)$ si dice che f e' integrabile secondo Riemann su $[a,b]$

e il valore comune si dice

* in formule: se $\mathcal{A} = \{x_0, \dots, x_k\}$ è una suddivisione, se si aggiunge z ad $\mathcal{A}$, per qualche indice h si ha: $x_h < z < x_{h+1}$

addendo di $S''(f, \mathcal{A})$

$$\sup_{[x_h; x_{h+1}]} f \cdot (x_{h+1} - x_h) =$$

$$= \sup_{[x_h; x_{h+1}]} f \cdot (x_{h+1} - z) + \sup_{[x_h, x_{h+1}]} f \cdot (z - x_h) \geq$$

poiché $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

$$\geq \sup_{[z; x_{h+1}]} f \cdot (x_{h+1} - z) + \sup_{[x_h; z]} f \cdot (z - x_h)$$

addendi di $S''(f, \mathcal{A} \cup \{z\})$

Corollario $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \quad S'(f, \mathcal{A}) \leq S''(f, \mathcal{B})$

Infatti $S'(f, \mathcal{A}) \leq S'(f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq S''(f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq S''(f, \mathcal{B})$

NOTAZIONE poiché

1) date due suddivisioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ vi sono sempre suddivisioni $\mathcal{C}$ t.c.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{C}$$

(si può sempre "andare avanti")

e.g. dato $y \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \{y\}$

2) le somme superiori decrescono deb.
inferiori crescono deb.

rispetto all'inclusione $\subsetneqq$, cioè aggiungendo punti

è suggestivo scrivere

$$S'(f,\mathcal{A}) \underset{\mathcal{A}\to\infty}{\nearrow} S'(f) \quad \text{e} \quad S''(f,\mathcal{A}) \underset{\mathcal{A}\to\infty}{\searrow} S''(f)$$

In effetti per caratterizzazione di estremo sup.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A} \quad 0 \leq S'(f) - S'(f,\mathcal{A}) \leq \varepsilon$ quindi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{A} \ \forall \mathcal{C} \supsetneqq \mathcal{A} \quad 0 \leq S'(f) - S'(f,\mathcal{C}) \leq \varepsilon$.

DEFINIZIONE

data una suddivisione $\mathcal{A}=\{x_0,\dots,x_n\}$

la finezza di $\mathcal{A}$ è

$$\max_{0\leq i\leq k-1}(x_{i+1}-x_i) =_{\text{NOTAZIONE}} \delta_{\mathcal{A}}$$

Osservazione

fissato $\delta>0, \varepsilon>0$

se $\quad 0\leq S'(f)-S'(f,\mathcal{A})\leq\varepsilon$

$\quad 0\leq S''(f,\mathcal{B})-S''(f)\leq\varepsilon$

si potran sempre scegliere

$\mathcal{A}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}$ per cui

$0\leq S'(f)-S'(f,\mathcal{A}_1)\leq\varepsilon$ e $\delta_{\mathcal{A}_1}\leq\delta$

$0\leq S''(f,\mathcal{B}_1)-S''(f)\leq\varepsilon$ $\quad \delta_{\mathcal{B}_1}\leq\delta$

DEFINIZIONE: f limitata su $[a;b]$, $a \leq b$:

se $S'(f) = S''(f)$ si dice che

f è Riemann integrabile su $[a;b]$

Il valore comune si dice

integrale di f su $[a;b]$

e si indica con

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a \leq b)$$

"base infinitesima"

"altezza"

$\int$ è una "esse" per somma.

Definizione se $f \geq 0$ ed $\exists \int_a^b f(x)\,dx$

si definisce

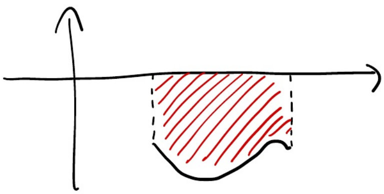
$$\text{Area}(\{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}) = \int_a^b f(x)\,dx$$

"intragrafico tra 0 ed f"

integrale di f su $[a,b]$ e si indica

con $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= S^I(f) = S^u(f) \right)$

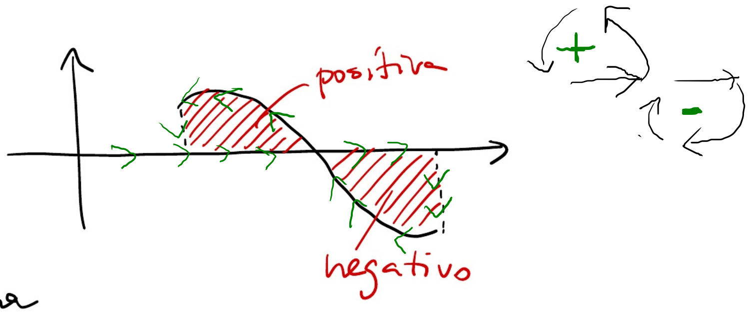
Oss: questa def. ha senso anche quando f può prendere valori negativi.



se $f \le 0 \implies \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le 0$

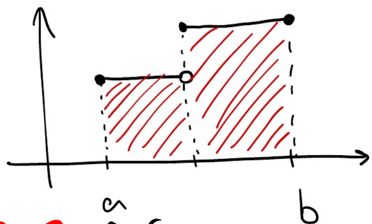
ed è l'opposto dell'area in figura.

In generale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è la somma algebrica delle aree in figura.



Teorema: se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è integrabile.

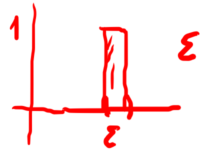
Oss: ci sono anche funzioni non continue che sono integrabili, ad esempio



è integrabile ma non è continua.

Osservazione: le funzioni costanti a tratti sono integrabili

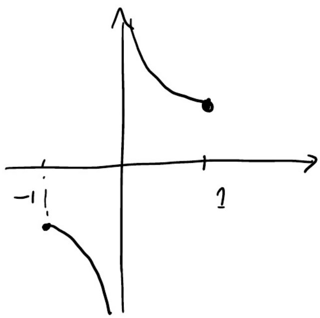
Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è generalmente continua se è limitata e ha eventualmente un numero finito di punti di discontinuità.



Esempio

è integrabile e $\int_0^3 f(x)\,dx = 0$

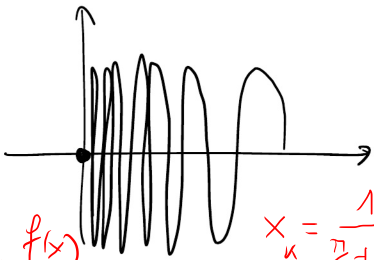
Esempio: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$ $\quad f:[-1,1]\to\mathbb{R}$



C'è un solo punto di discontinuità, ma f non è limitata $\Rightarrow$ non è generalmente continua.

Teorema: se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ generalmente continua, allora f è integrabile.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\qquad f : [0,1] \to \mathbb{R}$



$f(x)$ non è continua, ma è generalmente continua

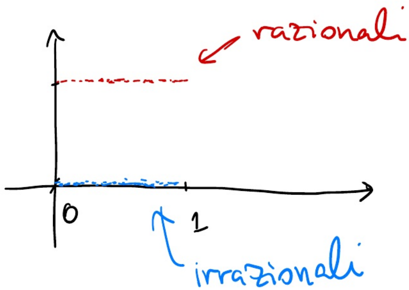
$\nexists \lim_{x \to 0^+} f(x)$ $\quad x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $\quad f(x_k) = 1$ $\Longrightarrow$ integrabile.

$y_k = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}$ $\quad f(y_k) = -1$

Esempio di una funzione non integrabile (seppur limitata)

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

funzione di Dirichlet



Per qualsiasi $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [0,1]$

si ha

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1 \quad \text{e}$$

$$\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0$$

Segue che $S'(f, A) = 0$ $\forall A$ suddivisione di $[0,1]$

$\Rightarrow S'(f) = 0$.

e $S''(f, A) = 1$ $\forall A$ " " "

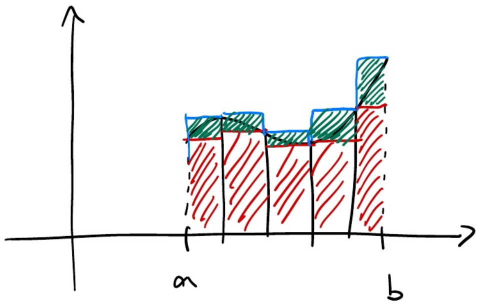
$\longrightarrow S''(f) = 1$

Quindi $S'(f) \neq S''(f) \Rightarrow f$ non è integrabile.

Se f è integrabile, $S''(f,A) - S'(f,A) \xrightarrow{\#\to\infty} 0$

"tende a 0" al raffinarsi della suddivisione.

area della regione verde.



COME CALCOLARE GLI INTEGRALI

Teorema: siano f, g integrabili su $[a,b]$ e $k \in \mathbb{R}$.

Allora: $f+g$, $k \cdot f$, $|f|$ sono integrabili,

e si ha:

1) $$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b (k \cdot f)(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE

3) se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

MONOTONIA DEB CRESCENTE DELL' INT.

4) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE

il valore assoluto di una somma non è più grande della somma dei valori assoluti degli addendi

$|a+b| \leq$
$\leq |a|+|b|$

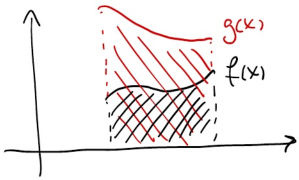
$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq$
$\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

5) Se $a < c < b$ allora

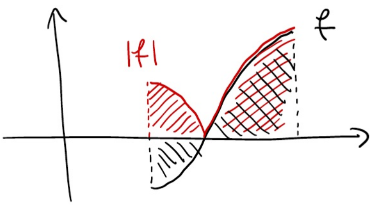
ADDITIVITÀ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

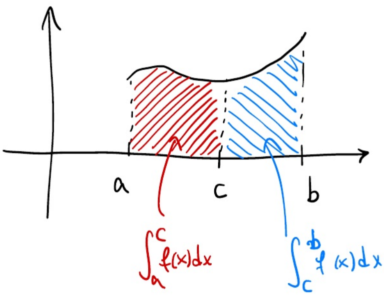
3) :



4) :



5) :



Teorema Se f è integrabile su $[a;b]$ allora per $\tau \in \mathbb{R}$

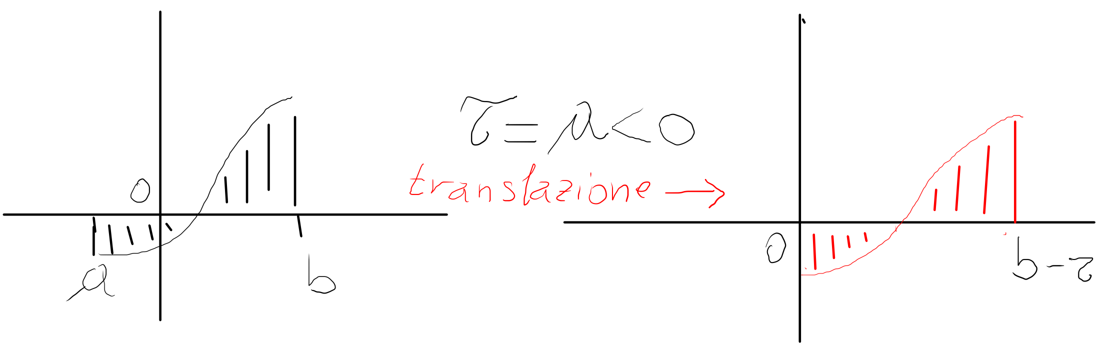
$$g(x) = f(x+\tau)$$
$$h(x) = f(-x)$$

sono integrabili rispettivamente

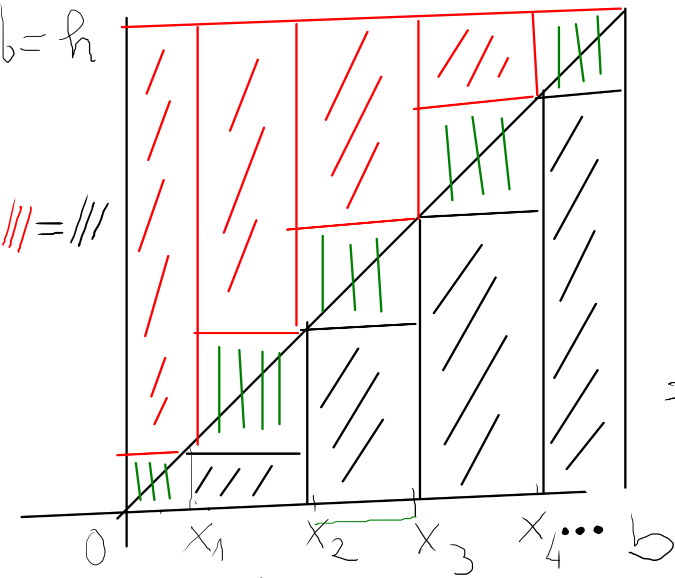
su $[a-\tau; b-\tau]$

su $[-b; -a]$

e
$$\int_{a-\tau}^{b-\tau} g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} h(x)\,dx$$



Esempio verificchiamo che la definizione data è ragionevole e in effetti calcola l'area di figure note



$f(x) = x \qquad 0 \leq x \leq b$

$$S'(f,\mathcal{A}) = \frac{b \cdot h - \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{2}$$

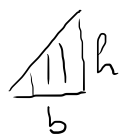
$$= \boxed{\frac{b^2}{2}} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)^2 .$$

Si tenga presente si possono usare suddivisioni con $\mathrm{MAX}(x_{i+1} - x_i) = \delta_{\mathcal{A}}$ scelto a piacere

ora $$\sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)^2 \leq \mathrm{MAX}_{0 \leq i \leq k-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \sum_{i=1}^{k-1} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \delta_{\mathcal{A}} \cdot b$$

Quindi $$S'(f,\mathcal{A}) \xrightarrow[\mathcal{A} \to \infty]{} \boxed{\frac{b^2}{2}} = \frac{b \cdot h}{2}$$



Esempio ma come calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)\, dx \; ? \ldots$$ con la

definizione direttamente non sembra
egevole!

"Trucco generale" $(\sin x)' = \cos x$

$\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = \frac{\pi}{2}\}$ suddivisione di $[0; \pi/2]$, si usa Lagrange $*$

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin x_{k-1} + \sin x_{k-1} - \sin x_{k-2}$$

$$+ \sin x_{k-2} - \sin x_{k-3} + \ldots - \sin x_2$$

$$+ \sin x_2 - \sin x_1 + \sin x_1 - \sin 0 =$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} (\sin x_{h+1} - \sin x_h) \overset{*}{=} \sum_{h=0}^{k-1} (\cos \xi_{h+1})(x_{h+1} - x_h)$$

$\xi_{h+1} \in (x_h; x_{h+1}) \Longrightarrow S'(\cos, \mathcal{P}) \leq 1 \leq S''(\cos, \mathcal{P}) \quad \forall \mathcal{P}$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx \leq 1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

Teorema

Se F è derivabile in $[a;b]$ ed $f=F'$ è integrabile in $[a;b]$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

DIM sia $\sigma=\{x_0=a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k=b\}$ suddivisione di $[a;b]$

$$F(b)-F(a) = F(b)-F(x_{k-1})+F(x_{k-1}) \dots F(x_1)-F(a)$$

$x_h < \xi_{h+1} < x_{h+1}$

$$= f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) + f(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x_{k-2}) \dots f(\xi_1)(x_1-a)$$

$$= \sum_{h=0}^{k-1} f(\xi_{h+1})(x_{h+1}-x_h), \quad \text{quindi}$$

$$\forall \sigma \quad s(f,\sigma) \le F(b)-F(a) \le S(f,\sigma)$$

$$s(f,\sigma) \downarrow \int_a^b f(x)\,dx \qquad S(f,\sigma) \downarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxplus$

Domanda

ma si riesce ad individuare una classe, di per se significativa, di funzioni f t.c.:

1) sono derivate di altre funzioni ?
2) sono integrabili ?

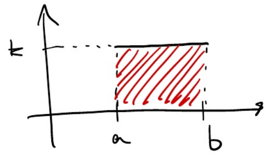
Il teorema fondamentale del calcolo integrale ci permetterà di trovarne una notevole!

Ci si prepara ora a dimostrarlo.

Oss : se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è costante, cioè

$f(x)=k \quad \forall x\in[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = k\cdot(b-a)$$

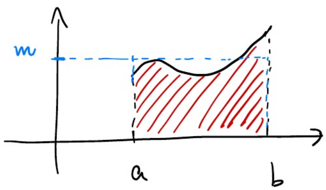


$$\min_{1\le i\le n} f_i \le \frac{f_1+f_2+\dots+f_n}{n} \le \max_{1\le i\le n} f_i$$

Def : se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile, (in particolare limitata)

si dice media integrale di f su $[a,b]$

$$m=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx \qquad m(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$$



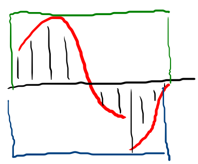
Graficamente, m è l'altezza di un rettangolo di base $b-a$, con la stessa area del sottografico di f.

Teorema (della media integrale):

1) sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile, allora

$$\inf_{[a,b]} f(x) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f(x)$$

$(b-a)\sup f$



$(b-a)\cdot\inf f$

2) Se f è continua, allora $\exists\, z\in[a,b]$ t.c.

f continua
$\exists z \in [a;b]$

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Dim</u>: $\forall x \in [a,b]$ abbiamo

$$\inf_{[a,b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f(x)$$

integriamo questa disuguaglianza (usando le proprietà 3) del Teorema)

e otteniamo

$$\int_a^b \Big(\inf_{[a,b]} f(x)\Big)dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \Big(\sup_{[a,b]} f(x)\Big)dx$$

Sono costanti

1) $\Longrightarrow \Big(\inf_{[a,b]} f(x)\Big)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \Big(\sup_{[a,b]} f(x)\Big)(b-a)$

SOMMA INFERIORE

UNA SOMMA SUPERIORE

dividendo per $b-a>0$ ottengo proprio

$$\inf_{[a,b]} f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f(x).$$

2) Se f è continua, allora $\inf(f) = \min(f)$ e $\sup(f) = \max(f)$ (per Weierstrass)

e f prende tutti i valori compresi tra $\min(f)$ e $\max(f)$. (Teorema dei valori intermedi)

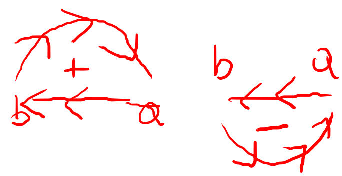
La media integrale e' un tale valore per quanto visto, quindi $\exists z \in [a,b]$ t.c.

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad \blacksquare$$

anzi z tra x_{MAX} e x_{MIN}

Oss: se $b<a$, definiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$



(e definiamo anche $\int_a^a f(x)\,dx = 0$) $\quad [a;a]$

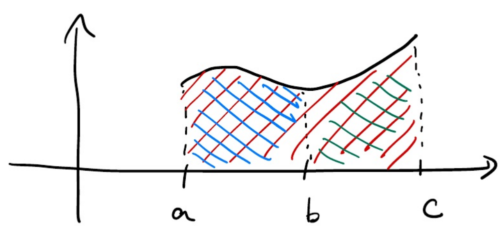
$$x^3 = \left(\frac{1}{4}x^4\right)'$$

Esempio: $$\int_2^1 x^3\,dx = -\int_1^2 x^3\,dx = -\left(\frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{4}1^4\right) = -4+\frac{1}{4}$$

Domanda: $$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx} = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}$$ ← estremi nell'ordine sbagliato

vale se $a<b<c$? Sì

Infatti:



mi sto chiedendo se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

cioè se $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

e questo è vero per il Teorema visto (in questo caso i punti sono nell'ordine giusto).

<u>Oss</u>: la media integrale ha senso anche quando gli estremi sono scambiati:

se $b<a$, allora $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(-\int_b^a f(x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx.$$

<u>Def</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ <u>intervallo</u>, $f: I \to \mathbb{R}$.

Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice <u>primitiva</u> sull'intervallo I di f se F è derivabile in I

e vale $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$. ← intervall

Esempio: $f(x) = 2x$. Una primitiva è $F(x) = x^2$.

Non è l'unica primitiva: $G(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$

ho comunque $G'(x) = 2x + 0 = f(x)$

quindi queste funzioni sono tutte primitive di $f(x) = 2x$.

In generale, se F è primitiva di f su un intervallo, tutte le funzioni $G(x) = F(x) + k$, $k \in \mathbb{R}$

sono pure primitive di $f(x)$.

Oss: in effetti due primitive di $f(x)$ differiscono sempre per una costante solo su un intervallo

Dim: siano F e G due primitive di f su un intervallo.

Allora ho che $F' = f$, $G' = f$.

Quindi $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$

Visto che siamo su un intervallo, concludo che $F - G$ è costante $= k \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in I. \qquad \blacksquare$$

OSSERVAZIONE

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

$\operatorname{dom} f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

TUTTE LE PRIMITIVE DI f QUALI SONO?

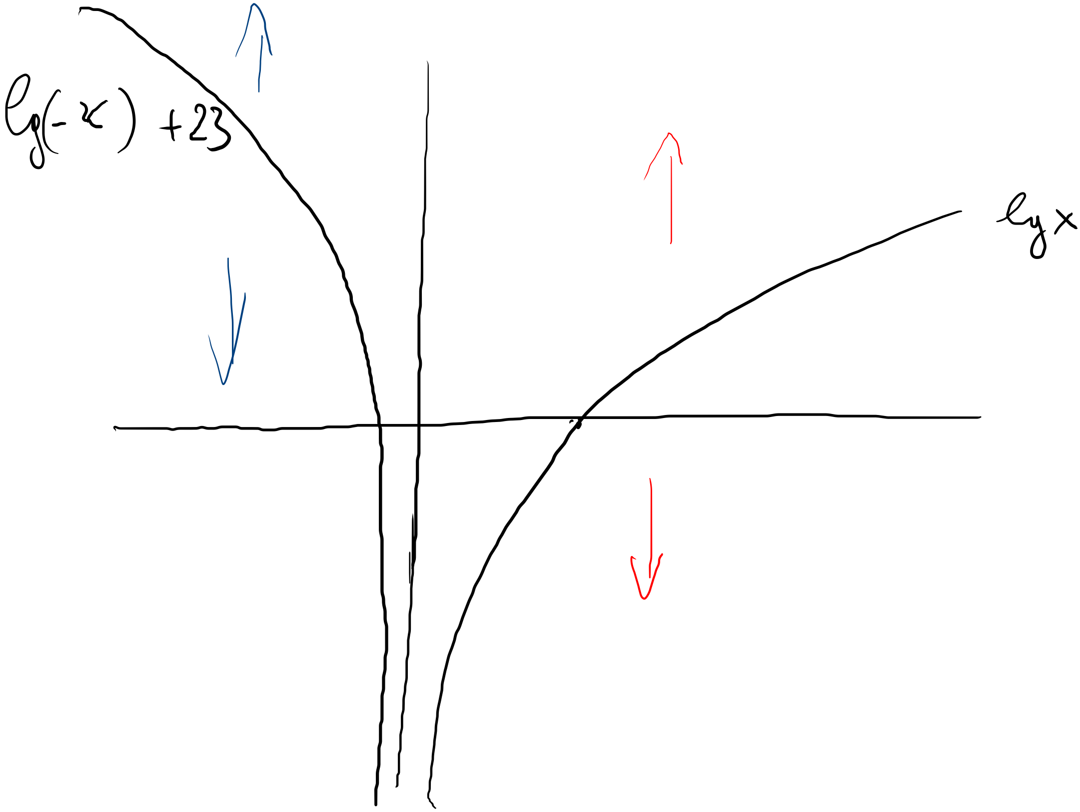
una primitiva è $\lg|x|$

$$\left(x > 0 \quad (\lg x)' = \frac{1}{x} \right.$$

$$\left. x < 0 \quad (\lg(-x))' = -1 \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \right)$$

Quindi sono del tipo

$$F(x) = \begin{cases} \lg x + c_1 & x > 0 \\ \lg(-x) + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

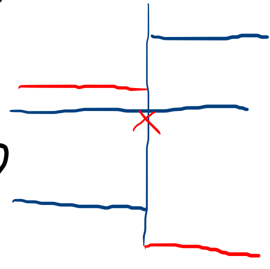


OSSERVAZIONE

$f(x) = 0 \qquad x \neq 0 \qquad \underbrace{\mathrm{dom}\, f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}_{\text{IMPONGO}}$

TUTTE LE PRIMITIVE SONO

$$F(x) = \begin{cases} C_1 & x > 0 \\ C_2 & x < 0 \end{cases}$$



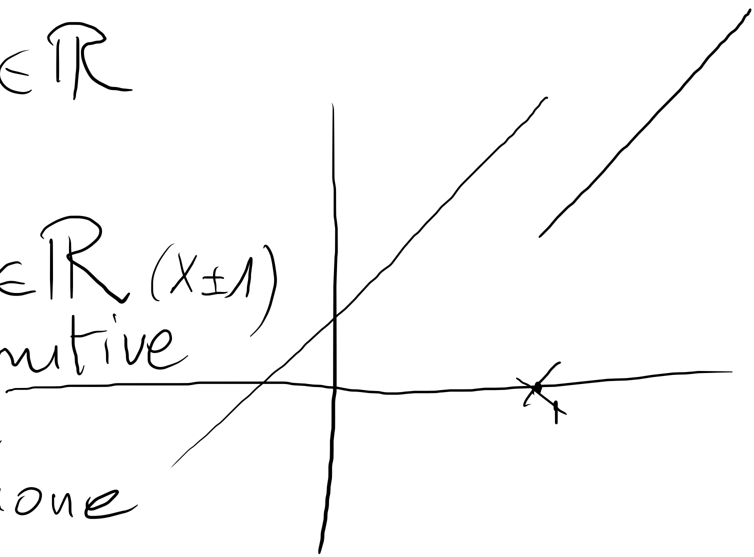
OSSERVAZIONE

$$f(x) = \frac{x-1}{x-1} \quad \text{dom} f = (-\infty;1) \cup (1,+\infty)$$

tutte le primitive saranno

$$F(x) = \begin{cases} x + c_1 & x > 1 \\ x + c_2 & x < 1 \end{cases}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$



$x + c$, $c \in \mathbb{R}$ $(x \neq 1)$
sono le primitive restrizioni di una funzione continua

Def: l'integrale indefinito di $f(x)$

l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$.

Si indica con $\int f(x)dx$. (senza gli estremi)

Oss: $\int f(x)dx$ non indica una singola funzione, ne l'integrale che è un numero ma un insieme di funzioni

$$\int f(x)dx = \{ F: I \to \mathbb{R} \mid F \text{ derivabile e } F' = f \}$$

Es: $\int 2x\,dx = \{ x^2 + k \mid k \in \mathbb{R} \}$

di solito si abbrevia scrivendo

$$\int 2x\,dx = x^2 + k$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left\{ \begin{cases} \lg x + c_1 & x > 0 \\ \lg -x + c_2 & x < 0 \end{cases} ; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

L'integrale di Riemann $\int_a^b f(x)dx$ invece e' un numero reale, e rappresenta l'area del sottografico di f, e si dice integrale definito

a, b = estremi di integrazione

a inferiore, b superiore.

Dalle formule per le derivate seguono formule per le primitive

Esempio:

- $\int e^x dx = e^x + k$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + k$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + k$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$

$*$ • $\int \frac{1}{x} dx = \cancel{\log|x| + k}$ $\begin{cases} \lg x + k_1, & x>0 \\ \lg(-x) + k_2 & x<0 \end{cases}$

$\int x^{-1} dx =$

infatti: se $x>0$ $(\log x)' = \frac{1}{x}$

$= \left\{ \begin{cases} \lg x + c_1 & x>0 \\ \lg(-x) + c_2 & x<0 \end{cases} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

se $x<0$ ho $|x| = -x$, e

$(\log(-x))' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

- $\int x^n dx = \boxed{\frac{1}{n+1}} \cdot x^{n+1} + K$

se $n \in \cancel{\mathbb{Z}}\,\mathbb{N}$, e $\underline{n \neq -1}$

Es: $\int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + k$

- più in generale, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$

per $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cancel{\neq -}1$

se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ dom $x^\alpha = [0, +\infty)$

$$* \quad \int x^m dx = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} x^{m+1} + k_1 & x>0 \\ \dfrac{1}{m+1} x^{m+1} + k_2 & x<0 \end{cases}$$

$m \in \mathbb{Z}$

$m < 0 \quad m \neq -1$

$; k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

Osservazione

per il calcolo dell'integrale di Riemann tale cautela si può evitare

Poichè $\int_a^b x^m dx$ $\quad m<0$, $m \in \mathbb{Z}$

necessariamente o $[a;b] \subset (0;+\infty)$

o $[a;b] \subset (-\infty;0)$ per def.!