Esercitazione 6, 12/11/2020

Esercizio 6: studiare $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

Dominio: l'arcsin da la condizione $-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$

e il denominatoore vuole $1+x^2 \neq 0$.

$1+x^2 \neq 0$ sempre, perche $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

e cerchiamo di risolvere $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1$ ①

e $\frac{2x}{1+x^2} \leq 1$. ②

① $\frac{2x}{1+x^2} \geq -1 \iff 2x \geq -(1+x^2)$

$$\iff \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} \geq 0$$

quindi e' vera sempre.

② si fa uguale, ed è pure vera sempre.

Quindi il domio è tutto $\mathbb{R}$.

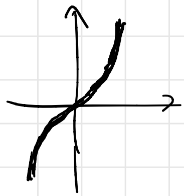
Limiti ai bordi del dominio: per continuità di arcsin.

$$\lim_{x \to +\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin(0) = 0$$

$$\frac{2x}{1+x^2} \to 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \arcsin(0) = 0$$

Quindi $y=0$ è asintoto orizzontale sia destro che sinistro.



Segno (?) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \geq 0$

$\Updownarrow$

$\frac{2x}{1+x^2} \geq 0$

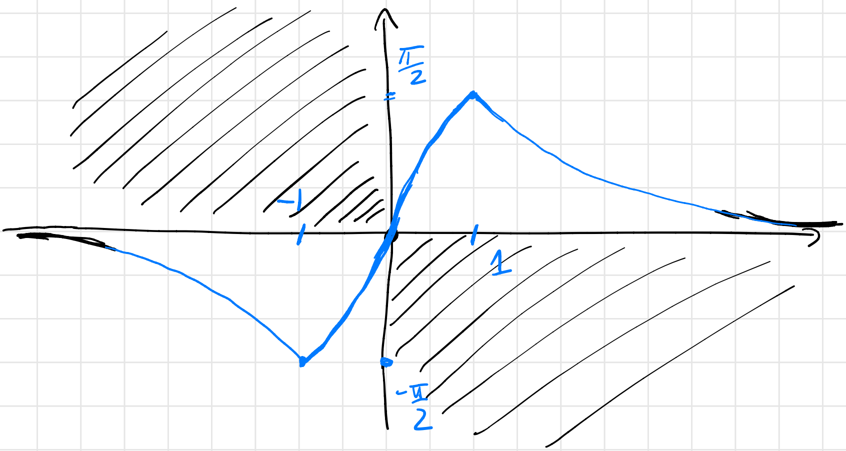
$\Updownarrow$

$2x \geq 0 \iff x \geq 0$

Quindi $f(x) > 0$ se $x > 0$

$f(0) = 0$

$f(x) < 0$ se $x < 0$.



$f(1) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$

Oss che $f(x)$ è dispari, $f(-x) = \arcsin\left(\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}\right) =$

$= -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$

$\Rightarrow$ basta studiarla per $x > 0$, poi riflettere il grafico.

$$f'(x)=\left(\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$\sqrt{t^2}=|t|$

$$=\frac{|1+x^2|}{\sqrt{\underbrace{1+x^4+2x^2-4x^2}_{}}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=$$

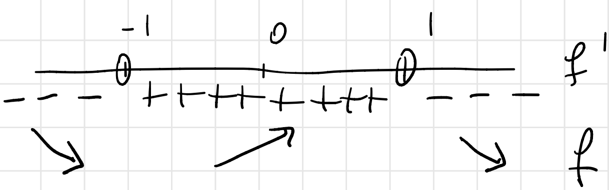
$1+x^4-2x^2=(1-x^2)^2$

$$=\frac{\cancel{1+x^2}}{|1-x^2|}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^{\cancel{2}}}=2\cdot\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

Notare che questa è definita quando $1-x^2\neq 0$ cioè $\underline{\underline{x\neq\pm 1}}$

Conviene sbarazzarsi del $|\ \ |$ in $|1-x^2|$ discutendolo.

$$f'(x)=\begin{cases} 2\cdot\frac{\cancel{1-x^2}}{\cancel{1-x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2} & \text{se } 1-x^2>0 \text{ cioè } x^2<1 \text{ cioè } -1<x<1 \\ 2\cdot\frac{\cancel{1-x^2}}{-(\cancel{1-x^2})}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{-2}{1+x^2} & \text{se } 1-x^2<0 \text{ cioè } x<-1 \text{ o } x>1. \end{cases}$$



Possiamo dedurre che -1 è un punto di minimo locale e 1 è un massimo locale.

$$\left(f'(0) = \frac{2}{1+0} = 2 \quad \text{(pendenza della tangente al grafico in 0)} \right)$$

Cosa succede in $x = \pm 1$? La funzione è derivabile?

$x = -1$. Visto che f è continua in -1, e derivabile attorno a -1, abbiamo che

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} f'(x) \quad \text{(c'è un teorema che dice questo)}$$

$$= \lim_{x \to -1^-} -\frac{2}{1+x^2} = -\frac{2}{1+(-1)^2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) =$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{2} = 1$$

Quindi f non è derivabile in $x = -1$, e ha un punto angoloso.

Dal grafico concludiamo che $x = 1 \rightsquigarrow f(1) = \frac{\pi}{2}$ è il massimo di $f(x)$ e $x = -1 \rightsquigarrow f(-1) = -\frac{\pi}{2}$ è il minimo di $f(x)$.

Esercizio 3: $$f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|}\right)$$

Dominio:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|} > 0$. Vale sempre, perché $\frac{1}{2} > 0$ e $|x^2+x| \geq 0$ $\Longrightarrow \frac{1}{|x^2+x|} \geq 0$

- $|x^2+x| \neq 0 \iff x^2+x \neq 0 \iff x(x+1) \neq 0$
$\iff x \neq 0$
$x \neq -1$.

Quindi il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0,-1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$

Limiti ai bordi del dominio

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log(2) < 0$$

(perché $\frac{1}{2} < 1$)

0

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$$

Quindi $y = \log\left(\frac{1}{2}\right)$ è asintoto orizzontale destro e sinistro.

$$\lim_{x\to(-1)} \log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}\right) = \log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{0^+}\right) = \log\left(\frac{1}{2}+\infty\right)$$

$$\cancel{= \text{``}\log(+\infty)\text{''} = +\infty}$$

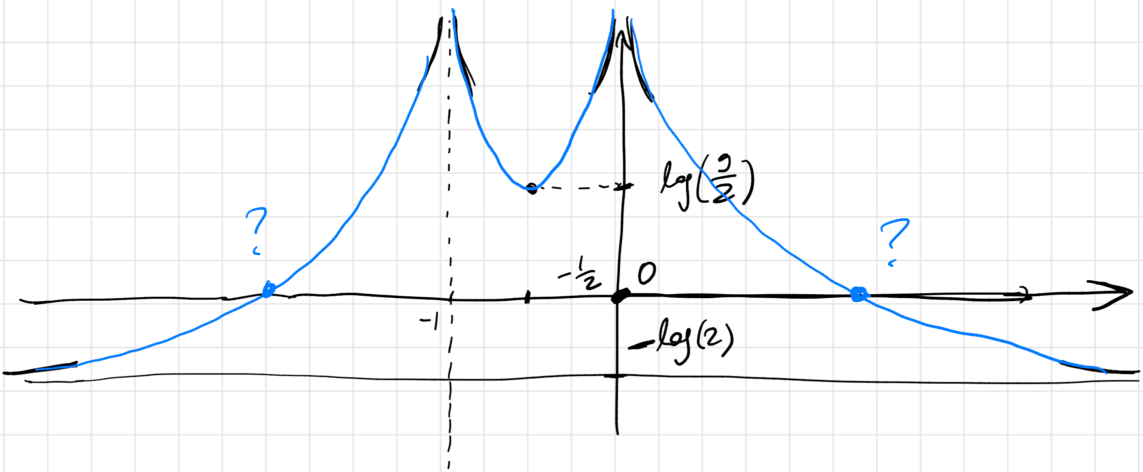
Visto che $\displaystyle\lim_{x\to(-1)} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}\right) = +\infty$

Segue che $\displaystyle\lim_{x\to(-1)} \log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}\right) = \lim_{y\to+\infty} \log(y) = +\infty$

$$y = \frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}\right) = +\infty$ per lo stesso motivo.

Quindi $x=-1$ e $x=0$ sono asintoti verticali.



(per quello che so finora, il grafico potrebbe andare sotto l'asintoto orizzontale ...)

Il segno si potrebbe studiare, ma vediamo prima la derivata.

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}} \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}\right)'$$

$0 < \frac{1}{2}+\frac{1}{|x^2+x|}$

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2+x}\right)'$ se $x^2+x>0$

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2+x}\right)'$ se $x^2+x<0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2+x}} \cdot \left((-1)\cdot(x^2+x)^{-2}\cdot(2x+1)\right) & \text{se } x^2+x>0 \text{ cioè } x<-1 \text{ o } x>0 \\ \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2+x}} \cdot \left(-(-1)(x^2+x)^{-2}\cdot(2x+1)\right) & \text{se } x^2+x<0 \text{ cioè } -1<x<0. \end{cases}$$

Riscrivo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2+x}} \cdot \left(\frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}\right) & \text{se } x<-1 \text{ o } x>0 \\ \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2+x}} \cdot \left(\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}\right). & \text{se } -1<x<0. \end{cases}$$

se $\boxed{x<-1 \text{ o } x>0}$, $f'(x)\geq 0 \iff -2x-1\geq 0$

$-2x\geq 1$

$\boxed{x\leq -\frac{1}{2}}$

Quindi trovo $x<-1$.

cioè $\boxed{\text{se } x<-1 \text{ o } x>0}$, $f'(x)\geq 0 \iff x<-1$

e non c'è nessun x t.c. $f'(x)=0$

se $\boxed{-1<x<0}$, $f'(x)\geq 0 \iff 2x+1\geq 0$

$\iff \boxed{x\geq -\frac{1}{2}}$

Quindi trovo $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, e $f'(-\frac{1}{2}) = 0$

(ed è l'unica sol. di $f'(x) = 0$)

Riassumendo

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & -1 & & -\frac{1}{2} & & 0 & \\
\hline
f' & +++++ & | & -- & 0 & ++++ & | & ----- \\
f & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow
\end{array}$$

Quindi $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo locale.

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right|}\right) = \log\left(\frac{1}{2} + 4\right) = \log\left(\frac{9}{2}\right) > 0$$

Quindi si può disegnare il grafico (vedi sopra).

Si può anche concludere $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\log(2)$, max e min non esistono.

Volendo ci si può chiedere chi sono le ascisse dei punti che ho segnato con ?

Cioè le soluzioni di $f(x) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|}\right) = 0$.

A volte questa equazione non si può risolvere "esplicitamente" (ad es. $e^x - x - 1 = 0$ o cose simili)

In questo caso si fa: $\log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|}\right) = 0$

$$\iff \frac{1}{2} + \frac{1}{|x^2+x|} = 1$$

$$\iff \frac{1}{|x^2+x|} = \frac{1}{2} \iff |x^2+x| = 2$$

$$\iff x^2+x = 2$$

oppure

$$x^2+x = -2$$

etc ....

Esercizio 1 : $f(x) = \dfrac{\log(x)}{(x-1)^2}$

Dominio :
- $x > 0$
- $(x-1)^2 \neq 0 \iff x \neq 1$.

Quindi il dominio è $(0,1) \cup (1,+\infty)$

Limiti : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\cancel{x})}{(x-1)^2} = \frac{-\infty}{(-1)^2} = -\frac{\infty}{1} = -\infty$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{(x-1)^2} = \frac{0}{0^+} = ??$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y} \cdot \frac{1}{y}$$

1

(non esiste!)

$y = x-1$

$x = y+1$

quando $x \to 1$, $y \to 0$

Quindi vedo che

$$\lim_{x\to 1^-}(\dots) = \lim_{y\to 0^-} \frac{\log(y+1)}{y}\cdot\frac{1}{y} = -\infty$$

$$\frac{\log(y+1)}{y} \to 1 \qquad \frac{1}{y} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}(\dots) = +\infty$$

(si poteva usare de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x(x-1)}$$

da lo stesso risultato.)

(arrivati a $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y^2}$ si può anche sviluppare al prim'ordine: $\log(1+y) = y + o(y)$

$$\frac{\log(1+y)}{y^2} = \frac{y\left(1+\frac{o(y)}{y}\right)}{y^2} = \frac{1}{y}\left(1+\frac{o(y)}{y}\right)$$

$$\frac{o(y)}{y} \to 0$$

e ci si arriva anche da qui.)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\text{logaritmo}}{\text{potenza di } x} \left(= \frac{+\infty}{+\infty}\right) = 0$$

(il polinomio vince sul logaritmo)

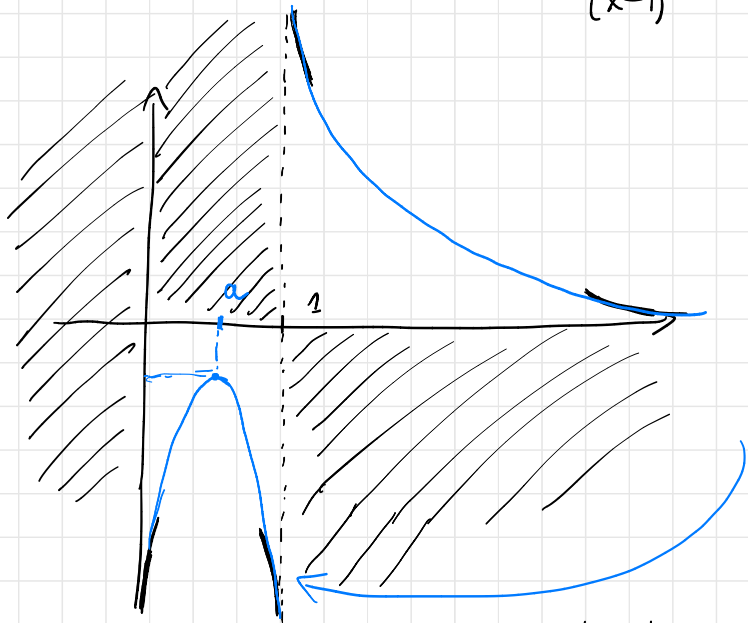
si può usare de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x(x-1)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

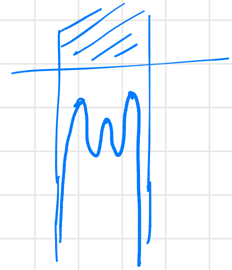
<u>Segno</u> : $f(x) \geq 0 \iff \dfrac{\log(x)}{(x-1)^2} \geq 0 \iff \log(x) \geq 0$

$\Updownarrow$

$x \geq 1$



a priori, qui poteva anche essere



<u>Derivata</u> : $f'(x) = \left(\dfrac{\log(x)}{(x-1)^2}\right)' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot(x-1)^2 - \log(x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{(x-1)^2 - 2x\log x\,(x-1)}{x(x-1)^4}$$

$$= \frac{x-1-2x\log x}{x(x-1)^3}$$

ha senso per $x > 0$, $x \neq 1$, quindi $f(x)$ è derivabile in tutto il suo dominio.

Per studiare il segno di $f'(x)$ devo studiare il segno di $g(x) = x - 1 - 2x\log(x)$.

Studiamo brevemente questa $g(x)$ a parte.

Ci interessa solo $x>0$ e $x \neq 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x-1-2x\log(x)\right) = 0-1-2\underbrace{0^+\cdot(-\infty)}_{??} = -1$$

limite notevole: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\log x = 0^-$

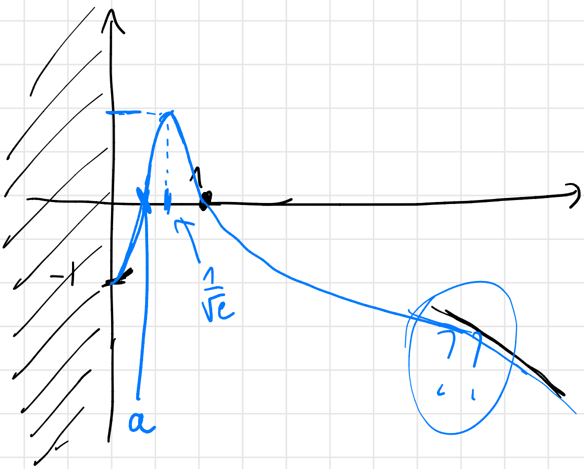
$$\left(y=\frac{1}{x} \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\cdot\log\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\log(y)}{y} \overset{\text{H\^op}}{=} \lim_{y\to+\infty} -\frac{\frac{1}{y}}{1} = 0^- \right)$$

$g(x)$ è continua in $x=1$, quindi non devo fare limiti

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1-2x\log(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-2\log(x)\right) = +\infty\left(1-0-\infty\right)$$

$$= +\infty\cdot(-\infty) = -\infty.$$



$$g(1) = 1-1-2\cdot 1\cdot 0 = 0$$

Vi ricordo che mi interessa il <u>segno</u> di $g(x)$.

Studiamo la derivata $g'(x) = 1-2\log(x) - 2x\cdot\frac{1}{x} =$

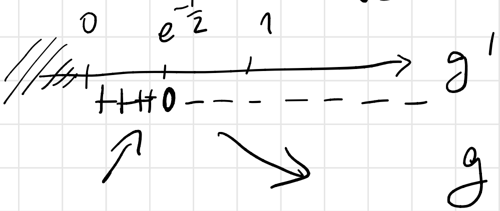
$$= 1-2\log(x)-2 =$$

$$= -2\log(x)-1$$

$$g'(x) \geq 0 \iff -2\log(x) - 1 \geq 0 \iff -1 \geq 2\log(x)$$

$$\iff \log(x) \leq -\frac{1}{2}$$

$$\iff x \leq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \quad \left(\text{perché } 1 < \sqrt{e} \iff \underset{1}{\underset{\parallel}{1^2}} < e\right)$$



$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{e}} - 1 \overset{?}{>} 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{e}} \overset{?}{>} 1$$

$$2 \overset{?}{>} \sqrt{e}$$

$$4 \overset{?}{>} e$$

$$\boxed{\text{Sì}}$$

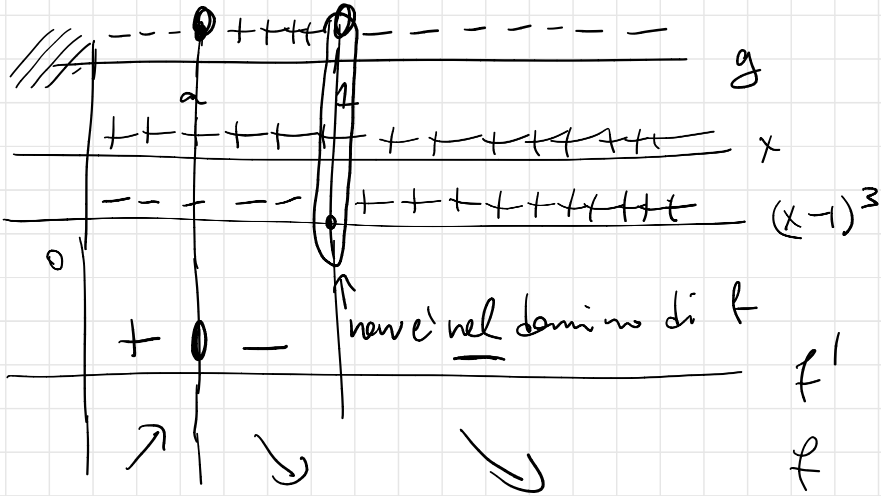
$$\Longleftarrow \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$$

Quindi denotiamo con a l'unica soluzione $\neq 1$ dell'eq

$$x - 1 - 2x\log x = 0.$$

Vedo che il segno di $g(x) = x - 1 - 2x\log$ è

Tornando alla $f(x)$, ora posso studiare il segno di $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(x-1)^3}$:



Quindi f ha un massimo relativo in $x = a$.
Si può tracciare un grafico approssimativo (vedi sopra).

Nell'esercizio 4, $\lim_{x \to -\infty}$:

$$f(x) = e^{2x} \cdot \sqrt[3]{x} . \quad \lim_{x \to -\infty} e^{2x} \cdot \sqrt[3]{x} = 0 \cdot (-\infty) \; ??$$

$$\left(\text{limite notevole} \quad \lim_{x \to -\infty} e^{x} \cdot x^{\alpha} \overset{\alpha > 0}{=} 0 . \right)$$

Non si può applicare direttamente de l'Hôpital, perché la f. indet. non è $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, ma la funzione si può trasformare in modo che la forma indeterminata sia di questo tipo:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} \cdot \sqrt[3]{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{-2x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\underset{\text{Hôp}}{\Longrightarrow} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{-2e^{-2x}} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{e^{-2x} \cdot \sqrt[3]{x^2}} \right) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{+\infty} = 0^-.$$

(altro modo: sostituire $y = -x$ e fare più o meno gli stessi conti ...)