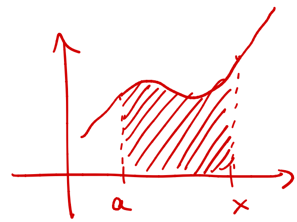
Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua.

Allora la funzione $\underbrace{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ (funzione integrale)

è una primitiva di f, cioè $F(x)$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.



<u>Dim</u>: mostriamo che F è derivabile calcolandone il rapporto incrementale in $x_0 \in I$ arbitrario, e poi facendo il limite.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt \right) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$ è la media integrale di f sull'intervallo di estremi x e x_0.

Visto che f è continua, per il teorema della media integrale $\exists\ z(x)$ compreso tra x_0 e x

t.c. $\quad f(z(x)) = \dfrac{1}{x-x_0}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Quindi $\quad F'(x_0) = \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z(x))$

Cambio variabile ponendo $y = z(x)$. Devo capire a cosa tende y quando $x \to x_0$.

So che $z(x)$ è compreso tra x_0 e x

(ad esempio se $x \le x_0$, so $\quad x \le z(x) \le x_0$)

quindi per il teorema dei carabinieri ho

$$\lim_{x\to x_0} z(x) = \lim_{x\to x_0} y = x_0 .$$

per continuità di f.

Segue che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(z(x)) = \lim_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)$.

Questo dimostra che $F'(x_0) = f(x_0)$, quindi

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I .$$

$\blacksquare$

Teorema di Torricelli

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ funzione continua, $a \in I$.

Se G è una primitiva di f su I, allora $\exists k \in \mathbb{R}$

t.c. $\quad G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + k$

e $\forall \alpha, \beta \in I$ abbiamo

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

<u>Notazione</u>: $\left[G(x)\right]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

<u>Esempio</u>: $\int_1^3 x\,dx$. Una primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \frac{x^2}{2}$

Quindi $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

(se prendevamo un'altra primitiva, ad esempio

$F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, trovavo

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 1\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \cancel{1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \cancel{1}\right) = \frac{8}{2} = 4.$$).

<u>Integrali con estremi variabili</u>

<u>Teorema</u>: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha, \beta: A \to I$ derivabili.

Sia
$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt .$$

Allora $G(x)$ e' derivabile, e si ha
$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) .$$

In particolare se $\alpha(x) = a$ costante e $\beta(x) = x$, si ha $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, e la formula da

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) =$$
$$= f(x) \cdot 1 - f(a) \cdot 0 = f(x)$$

(come nelle conclusione del t. fondamentale)

Esempio:
$$G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \cdot \operatorname{arctg}(t)\,dt$$

$f(t) = e^t \operatorname{arctg}(t)$
$\alpha(x) = x^2$
$\beta(x) = \sin x .$

Abbiamo
$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$
$$= e^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}(\sin(x)) \cdot \cos x - e^{x^2} \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot 2x .$$

Applicazione:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^t \operatorname{arctg}(t)\,dt}{\sin(x^4)} = \frac{\int_0^0 (\dots)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$$

forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Usiamo de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot \operatorname{arctg}(x^2)\cdot 2x - \cancel{e^0\cdot \operatorname{arctg}(0)\cdot 0}}{\cos(x^4)\cdot 4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \overbrace{\frac{e^{x^2}}{\underbrace{\cos(x^4)}_{1}}}^{1} \cdot \overbrace{\frac{\operatorname{arctg}(x^2)\cdot x}{2x^3}}^{\frac{1}{2}} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Integrazione per parti

$f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f continua e g di classe C^1. Se F è una primitiva di f, allora

$$\int f\cdot g\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx$$

(cioè g è derivabile e g' è una funzione continua)

Dim: $(Fg)' = \underbrace{F'}_{f} g + F\cdot g' = fg + Fg'$

integrando ambo i membri ottengo

$$\underbrace{\int (Fg)'\,dx}_{= F\cdot g} = \int fg\,dx + \int F\cdot g'\,dx$$

Quindi $$\int fg\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx .$$

$\blacksquare$

Esempio: $$\int \underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{\sin x}_{f}\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx \qquad \begin{aligned} F &= -\cos x \\ g' &= 1 \end{aligned}$$

$$= -\cos x\cdot x - \int (-\cos x)\cdot 1\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + k$$

(controllate il risultato derivandolo!)

Esempio: $$\int \log x\,dx = \int (\underbrace{1}_{f}\cdot\underbrace{\log x}_{g})\,dx \qquad \begin{aligned} F &= x \\ g' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$= F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx = x\cdot\log x - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= x\cdot\log x - x + k .$$

Esempio: $$\int \cos^2 x\,dx = \int \underbrace{\cos x}_{f}\cdot\underbrace{\cos x}_{g}\,dx \qquad \begin{aligned} F &= \sin x \\ g' &= -\sin x \end{aligned}$$

$$= Fg - \int F\cdot g'\,dx = \sin x\cdot\cos x - \int \sin x\,(-\sin x)\,dx$$

$$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \sin x \cos x + x - \underline{\int \cos^2 x \, dx}$$

Portando a primo membro e risolvendo

ottengo: $2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + k$$

<u>Oss</u>: $\left(\log(f(x))\right)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (sto supponendo $f(x) > 0$)

quindi $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log(f(x)) + k.$

$F = x$

<u>Esempio</u>: $\displaystyle\int \operatorname{arctg}(x) \, dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{g} \, dx =$ $\quad g' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$= Fg - \int F g' \, dx = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + k$$

Integrazione per sostituzione

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

$\varphi: J \to I$ di classe C^1. Se F è una primitiva di f, allora
$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \, dx = (F \circ \varphi) + k$$

Dim: $(F \circ \varphi)' = (F'(\varphi)) \cdot \varphi' \overset{F' = f}{=} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$

per la regola di derivazione di funzioni composte. Integrando trovo
$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \, dx = \int (F \circ \varphi)' \, dx = (F \circ \varphi) + k$$

$\blacksquare$

Esempio: $\int x e^{x^2} dx$. Poniamo $\varphi(x) = x^2$

$\varphi'(x) = 2x \rightsquigarrow x = \frac{\varphi'(x)}{2}$

$$= \int \frac{\varphi'(x)}{2} \cdot e^{\varphi(x)} dx$$

ponendo $f(t) = \frac{e^t}{2}$

$$= \int \varphi'(x) \cdot f(\varphi(x)) dx = (F \circ \varphi) + k =$$

$$\left(F(t) = \int \frac{e^t}{2} dt = \frac{e^t}{2} + k \right)$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + k$$

Metodo pratico:

$$\int \underline{x} e^{x^2} \underline{dx} =$$

pongo $t = x^2$ (funzione di x)

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\rightsquigarrow dt = 2x\,dx$$

$$\frac{dt}{2} = x\,dx$$

$$= \int e^t \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + k$$

e si torna in x sostituendo $t = x^2$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + k$$

Se voglio calcolare $\int_0^2 x e^{x^2} dx$, 2 modi:

1. Calcolare $\int x e^{x^2} dx$. Abbiamo visto che è $\frac{1}{2} e^{x^2} + k$.

   Poi $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} + k\right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$

2. Usare la sostituzione, <u>ricordandosi di cambiare gli estremi</u>:

$\int_0^2 x e^{x^2} dx$. Pongo $t = x^2 \rightsquigarrow \frac{dt}{2} = x\,dx$

Quindi $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^4 \frac{e^t}{2} dt$

$x=0 \rightsquigarrow t=0^2=0$

$x=2 \rightsquigarrow t=2^2=4$

$$= \left[\frac{e^t}{2}+k\right]_0^4 = \frac{e^4}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}(e^4-1).$$

Esempio: $\int \frac{tg\,x}{\cos^2 x} dx = \int \boxed{\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx}$

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$t = \cos x$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$dt = -\sin x \, dx$

$$= \int -\frac{dt}{t^3} = -\int t^{-3} dt = -\frac{1}{-3+1} \cdot t^{-2} + k$$

$$= \frac{1}{2} t^{-2} + K$$

$t = \cos x$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + k$$

Esempio: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx =$

$-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$x = \sin t \quad (t = \arcsin x)$

$\frac{dx}{dt} = \cos t \rightsquigarrow dx = \cos t \, dt$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \, dt$$

$$= \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \, dt = \int |\cos t| \cdot \cos t \, dt =$$

(~~supponiamo~~ visto che che $\cos t \ge 0$ nell'intervallo in cui stiamo integrando)

$$= \int \cos^2 t \, dt = \frac{t + \sin t \cos t}{2} + C =$$

(ricordando che $t = \arcsin x$, e quindi

$$\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{1-x^2}$$
)

$$= \frac{\arcsin x + x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

Applicazione: area del cerchio unitario.

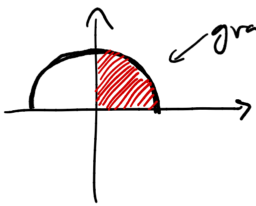


grafico di $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$$\text{Area cerchio unitario} = 4\cdot\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\cdot\left[\frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 4\cdot\left(\frac{\arcsin(1) + \cancel{1\cdot 0}}{2} - \frac{\cancel{\arcsin(0)}+\cancel{0\cdot 1}}{2}\right)$$

$$= 4\cdot\frac{\arcsin(1)}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + k \quad \text{visto che}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Oss: ho anche $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

quindi $$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos(x) + k'$$

Segue che $\arcsin(x) - (-\arccos(x)) =$

$= \arcsin(x) + \arccos(x)$ è costante.

Per vedere quanto vale basta calcolarla in $x=0$,

e trovo $\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$

Quindi $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$.