Integrali di (alcuni) funzioni razionali

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad \text{dove } p(x) \text{ e } q(x) \text{ sono polinomi in } x,$$
$$\text{e } \deg q(x) \le 2.$$

$\deg q(x) = 1$:

Caso particolare: $\displaystyle \int \frac{1}{ax+b}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{y}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y}\,dy$

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad$ $y = ax+b$, $dy = a \cdot dx$

$$= \frac{1}{a}\log|y| + C$$
$$= \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

Per il caso $\deg p(x) > 0$, si fa la divisione di polinomi di $p(x)$ per $q(x) = ax+b$.

Cioè scriviamo $p(x) = (ax+b)\cdot Q(x) + R(x)$.

dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono polinomi

e $\deg R(x) < \deg(ax+b) = 1$ $\quad a \neq 0$

($\Rightarrow$ $R(x)$ è una costante, ed è $= p\left(-\frac{b}{a}\right)$)

C'è un algoritmo per fare la divisione.

Esempio: $\displaystyle \int \frac{2x^2+1}{x+1}\,dx$ $\qquad \displaystyle \frac{p(x)}{ax+b} = \frac{2x^2+1}{x+1}$

$\begin{pmatrix} a=1 \\ b=1 \end{pmatrix}$

$p(x) = 2x^2+1$.

Divido $2x^2+1$ per $x+1$

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & +0\cdot x & +1 & x+1 \\ \cline{4-4} -2x^2 & -2x & & 2x-2 \\ \hline // & -2x & +1 & \\ & +2x & +2 & \\ \cline{2-3} & // & +3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2+1 = \underbrace{(x+1)}_{ax+b}\underbrace{(2x-2)}_{Q(x)}+\underbrace{3}_{R(x)}}$$

Ora, $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(2x-2)+3}{x+1}\,dx =$

$$= \int \frac{\cancel{(x+1)}(2x-2)}{\cancel{(x+1)}}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= \int (2x-2)\,dx + 3\log|x+1| + C$$

$$= x^2 - 2x + 3\log|x+1| + C.$$

$\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ quando $\deg q(x) = 2$. $\quad q(x) = ax^2+bx+c$, $\; a \neq 0$

Facendo la divisione scrivo $p(x) = (ax^2+bx+c)\cdot Q(x) + R(x)$

dove $\deg R(x) < 2$

cioè $R(x) = cx+d$

Quindi $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{(ax^2+bx+c)\cdot Q(x) + R(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$

$$= \underbrace{\int Q(x)\,dx}_{\text{lo sappiamo fare}} + \int \frac{\overset{cx+d}{R(x)}}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Rimane da vedere come calcolare $\displaystyle\int \frac{cx+d}{ax^2+bx+c}\,dx \quad a \neq 0.$

Casi particolari, a seconda del numero di radici reali del denominatore.

1) due radici coincidenti e numeratore costante:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2} \underset{\substack{y=x-a \\ dy=dx}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-1}\cdot y^{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{y} + c$$

$$= -\frac{1}{x-a} + c$$

2) due radici reali distinte e numeratore costante:

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \qquad a \neq b$$

Si cercano due numeri reali A e B tali che

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \underbrace{\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}}.$$

$$= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{x(A+B)-Ab-Ba}{(x-a)(x-b)}$$

Se voglio che valga, per il principio di identità dei polinomi deve essere che $\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-Ba=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} A+B=0 \rightsquigarrow B=-A \\ -Ab-Ba=1 \rightsquigarrow -Ab+Aa=1 \rightsquigarrow A(a-b)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\underbrace{a-b}_{\neq 0 \text{ perché } a\neq b}}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-a}$$

A questo punto

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int \left(\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{(x-b)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{a-b} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{(x-b)} \right) dx$$

$$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b} \right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\log|x-a| - \log|x-b|\right) + C$$

$$= \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$$

Esempio: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$

$$x^2-8x+15=0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

$$x^2-8x+15 = (x-5)(x-3)$$

$$a=5\,,\ b=3$$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+15} = \frac{1}{a-b}\cdot\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| \underset{+C}{=} \frac{1}{2}\cdot\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right| + C$$

Cosa succedeva se sceglievo $a=3,\ b=5$?

Trovavo: $$\frac{1}{3-5}\cdot\log\left|\frac{x-3}{x-5}\right| = -\frac{1}{2}\cdot\log\left|\frac{x-3}{x-5}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{x-3}{x-5}\right|\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right| + C.$$

---

3) denominatore senza radici reali e numeratore costante.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C$$

generalizzando

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}$$

$k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$

$$= \frac{1}{k^{\cancel{2}}} \cdot \int \frac{1}{1+y^2} \cdot \cancel{k}\, dy$$

$y = \frac{x}{k}$

$dy = \frac{dx}{k}$

$$= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}(y) + C$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) + C$$

Caso generale: denominatore ax^2+bx+c senza radici reali, cioè $\Delta < 0$.

in realtà posso supporre che $a=1$:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\, dx$$

Quindi guardo polinomi della forma x^2+bx+c.

$$\Delta = b^2-4c < 0$$

$$x^2+bx+c = \left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} + c$$

$$= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\overbrace{\left(-b^2+4c\right)}^{= -\Delta > 0}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + k^2} \qquad k^2 = \frac{1}{4}(-b^2+4c) > 0$$

$y = x + \frac{b}{2}$

$dy = dx$

$$= \int \frac{1}{y^2+k^2}\, dy$$ e questo lo sappiamo fare.

$$= \frac{1}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right) + C$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{k}\right) + C .$$

Esempio: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} =$

$\Delta = 4 - 40 < 0$ $\displaystyle = \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$ $\qquad k^2 = 9 \Downarrow k = 3$

$y = x+1$

$dy = dx$

$$= \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C .$$

(scegliendo $k = -3$ viene lo stesso risultato: $-\frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(-\frac{y}{3}\right) + C$

$= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C$.)

Rimane da vedere cosa succede quando il denominatore non è costante, cioè ha grado 1.

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx = \frac{a}{2} \cdot \int \frac{2x+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx$$

$$(x^2+cx+d) = 2x+c \qquad = \frac{a}{2}\int \frac{2x+c-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}$$

$$= \frac{a}{2}\underbrace{\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d}\,dx}_{\text{il numeratore è la derivata del denominatore}} + \underbrace{\frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx}_{\text{lo sappiamo fare}}$$

$$= \frac{a}{2}\log|x^2+cx+d| + \frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\,dx$$

Esempio:

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x-1}\,dx = 2\int \frac{2x+2-2+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1}\,dx$$

$$(x^2+2x-1)' = 2x+2$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1}\,dx + \cancel{2}\int \frac{+\frac{1}{\cancel{2}}}{x^2+2x-1}\,dx$$

$$= 2\log|x^2+2x-1| + \int \frac{1}{x^2+2x-1}\,dx$$

sappiamo farlo.

<u>Esempio</u> : $\displaystyle\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx$

Facciamo la divisione:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 3x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + x + 3 & x^2-1 \\ \hline
-x^5 \qquad\quad + x^3 & x^3-3x^2+x-3 \\
\hline
// \; -3x^4 + x^3 + 0\cdot x^2 + x + 3 & \varphi(x) \\
+3x^4 \qquad\quad -3x^2 & \\
\hline
// \quad +x^3 \; -3x^2 + x + 3 & \\
-x^3 \qquad\quad +x & \\
\hline
// \quad -3x^2 + 2x + 3 & \\
+3x^2 \qquad -3 & \\
\hline
// \quad 2x + 0 & R(x)
\end{array}
$$

$$x^5-3x^4+x+3 = (x^3-3x^2+x-3)(x^2-1)+2x$$

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{(x^3-3x^2+x+3)(x^2-1)+2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int (x^3-3x^2+x+3)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + \log|x^2-1| + C.$$

Esempi "riassuntivi"

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx.$

2 modi: 1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx =$

$$= -\int \frac{dy}{1-y^2} = -\int \frac{1}{(1+y)(1-y)}\,dy$$

$y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x$

$dy = -dx \sin x$

$$= -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log|1+y| - \log|1-y|\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \log\sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|} + C$$

$$= \log\sqrt{\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|} + C.$$

2 formule parametriche:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

La sostituzione $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightsquigarrow \frac{dt}{dx} = \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' =$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+t^2)$$

$$\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\cdot\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{1+t^2}}$$

$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log|t| + C$$

$$= \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

Usando le f. parametriche si vede che effettivam.

$$\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|}\ .$$

- $$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(e^x)^2}{1+e^x}\,dx = \int \frac{y^2}{1+y}\,\frac{dy}{y} = \int \frac{y}{1+y}\,dy =$$

$$\left(\begin{array}{l} y=e^x \\ dy = e^x\cdot dx \implies dx = \frac{dy}{e^x} = \frac{dy}{y} \end{array}\right)$$

$$= \int \frac{y+1-1}{y+1}\,dy = \int dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy = y - \log|y+1| + C$$

$$= e^x - \log(e^x+1) + C$$

- $$\int \underbrace{e^x}_{f}\,\underbrace{\cos x}_{g}\,dx = Fg - \int Fg'\,dx = e^x\cdot\cos x - \int e^x\cdot(-\sin x)\,dx$$

$F=e^x \quad g' = -\sin x$

$$= e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g}\,dx$$

$F = e^x \quad g' = \cos x$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Quindi $\quad 2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x)$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x).$$

- $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx \underset{\uparrow}{=} \int y \cdot e^y \, 2y\, dy = 2\int \underbrace{y^2}_{g} \cdot \underbrace{e^y}_{f} \, dy$

$y = \sqrt{x}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow dx = 2y\,dy$

$F = e^y$
$g' = 2y$

$$= 2\left(e^y \cdot y^2 - \int e^y \cdot 2y\, dy\right) = 2e^y \cdot y^2 - 4\int \underbrace{y}_{g} \cdot \underbrace{e^y}_{f} \, dy$$

$F = e^y$
$g' = 1$

$$= 2y^2 e^y - 4\left(e^y \cdot y - \int e^y \cdot 1 \, dy\right)$$

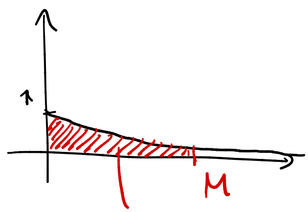
$$= 2y^2 e^y - 4y e^y + 4e^y + C \qquad y = \sqrt{x}$$

$$= 2x e^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C.$$

Integrali impropri (o generalizzati)

estendono la definizione di integrale definito al caso in cui l'integranda non è limitata, oppure l'intervallo di integrazione non è limitato.

Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$



$\displaystyle\int_0^{M} e^{-x}\,dx$

intuitivamente rappresenta l'area di tutto il sottografico sopra $[0, +\infty)$

Formalmente definiremo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} e^{-x}\,dx =$$

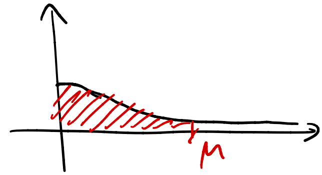
$$= \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} -e^{-M} + 1 = 1$$

$$e^{-M} \to 0$$

In questo caso il sottografico sopra $[0, +\infty)$ ha area finita, $= 1$.

Esempio: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$



$$= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \Big[\log(1+x)\Big]_0^M = \lim_{M\to+\infty} \big(\log(1+M) - 0\big) = +\infty$$

In questo caso l'area del sottografico è infinita.

Esempio: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata su $[0,1]$)

$$= \lim_{M\to0^+} \int_M^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{M\to0^+} \Big[2\sqrt{x}\Big]_M^1$$

$$= \lim_{M\to0^+} \big(2 - 2\sqrt{M}\big) = 2$$ e questa è l'area del sottografico di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sopra a $[0,1]$.

Esempio: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (il disegno è simile al caso precedente)

$$= \lim_{M \to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to 0^+} [\log(x)]_M^1 =$$

$$= \lim_{M \to 0^+} (0 - \log(M)) = +\infty$$

quindi in questo caso il sottografico ha area infinita.

Definizione generale:

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ e $f:[a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia integrabile in tutti gli intervalli $[a,M]$ con $a<M<b$

Se esiste

$$\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\,dx = L$$

definiamo $\int_a^b f(x)\,dx = L$.

Se L è reale finito, si dice che l'integrale di $f(x)$ su $[a,b)$ converge (oppure che $f(x)$ è integrabile "in senso generalizzato" su $[a,b)$)

Se $L = +\infty$ si dice che l'integrale diverge positivamente (o "a $+\infty$")

Se $L=-\infty$ si dice che l'integrale diverge negativamente (o "a $-\infty$")

Esempi visti sopra: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge,

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ diverge positivamente,

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge positivamente.

Esempio in cui il limite non esiste:

$$\int_0^{+\infty} \cos(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \cos(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\sin(x)\right]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (\sin(M)-0)$$ e questo non esiste.