PRIMITIVE ~~Integrali~~ di (alcuni) funzioni razionali

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$ dove $p(x)$ e $q(x)$ sono polinomi in x, e $\deg q(x) \leq 2$.

(primitive su UN intervallo ove $q(x) \neq 0$)

$\deg q(x) = 1$:

- Caso particolare : $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{y}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y}\,dy$

primitive di $\frac{1}{ax+b}$ su UNO dei due intervalli dati da $ax+b>0$ o da $ax+b<0$

$a,b \in \mathbb{R}$ $\quad y = ax+b$, $dy = a \cdot dx$

$$= \frac{1}{a}\log|y| + C$$
$$= \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

Per il caso $\deg p(x) > 0$, si fa la divisione di polinomi di $p(x)$ per $q(x) = ax+b$.

Cioe' scriviamo $p(x) = (ax+b)\cdot Q(x) + R(x)$.

dove $Q(x)$ e $R(x)$ sono polinomi (gli unici!) $a \neq 0$

e $\deg R(x) < \deg(ax+b) = 1$

($\Rightarrow$ $R(x)$ e' una costante, ed e' $= p\left(-\frac{b}{a}\right)$)

C'e' un algoritmo per fare la divisione.

TEOREMA

dati due polinomi p e d

$-\infty < \deg d \leq \deg p$

cioe' d non è il pol. nullo

$\exists!$ unici due pol. Q ed R t.c.

1) $p = d\cdot Q + R$

2) $\deg R < \deg d$

Con $d = ax+b$

Esempio : $$\int \frac{2x^2+1}{x+1}\,dx \qquad \frac{p(x)}{ax+b} = \frac{2x^2+1}{x+1}$$

$\begin{pmatrix} a=1 \\ b=1 \end{pmatrix}$

$p(x) = 2x^2+1$.

Divido $2x^2+1$ per $x+1$

$q = d$

$$
p \qquad
\begin{array}{rrr|l}
2x^2 & +\,0\cdot x & +\,1 & x+1 \\
\cline{4-4}
-2x^2 & -2x & & 2x-2 \\
\cline{1-3}
// & -2x & +1 & Q \\
 & +2x & +2 & \\
\cline{2-3}
 & // & +3 & \\
 & & R &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2+1 = \underbrace{(x+1)}_{ax+b}\underbrace{(2x-2)}_{Q(x)}+\underbrace{3}_{R(x)}}$$

Ora, $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x+1}\,dx = \int \frac{(x+1)(2x-2)+3}{x+1}\,dx =$

$$= \int \frac{\cancel{(x+1)}(2x-2)}{\cancel{(x+1)}}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= \int (2x-2)\,dx + 3\log|x+1| + C$$

$$= x^2-2x+3\log|x+1|+C.$$

$\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ quando $\deg q(x) = 2$. $\qquad q(x) = ax^2+bx+c$

$a \neq 0$

Facendo la divisione scrivo $p(x) = (ax^2+bx+c)\cdot Q(x) + R(x)$

dove $\deg R(x) < 2$

cioè $R(x) = cx+d$

Quindi $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int \frac{(ax^2+bx+c)\cdot Q(x)+R(x)}{ax^2+bx+c}\,dx$

$$= \underbrace{\int Q(x)\,dx}_{\text{lo sappiamo fare}} + \int \frac{\overset{cx+d}{R(x)}}{ax^2+bx+c}\,dx$$

ci si riduce

A] $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}$

B] $\displaystyle\int \frac{x}{ax^2+bx+c}$

$\delta x + e$

Rimane da vedere come calcolare $\displaystyle\int \frac{\delta x+e}{ax^2+bx+c}\,dx$ $\quad a\neq 0.$

A] $b^2-4ac=0$, $\Delta>0$, $\Delta<0$

Casi particolari; a seconda del numero di radici reali del denominatore.

A] $\delta=0$ tre sottocasi

1) due radici coincidenti e numeratore costante:

$\delta=0$

$\Delta=0$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^2} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{dy}{y^2} = \int y^{-2}\,dy = \frac{1}{-1}\cdot y^{-1}+c$

$y=x-a$

$dy=dx$

$$= -\frac{1}{y}+c$$

$$= -\frac{1}{x-a}+c$$

primitive

o su $(a;+\infty)$

o su $(-\infty;a)$

$n>1$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx$$

$$\Vert$$

$$\frac{1}{(n-1)}\,\frac{1}{a}\,\frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + c$$

2) due radici reali distinte e numeratore costante:

$\delta=0$

$\Delta>0$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ $\quad a \overset{<}{\neq} b$ (Primitive su I uno dei tre intervalli $(-\infty;a)$ o $(a;b)$ o $(b;+\infty)$)

Si cercano due numeri reali A e B tali che osservazione

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n} \quad \begin{cases} n=1 & \lg|x-\alpha|+k \\ n>1 & -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}+k \end{cases}$$

$(x-\alpha)=y$

$$* \quad \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \underbrace{\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}}$$

$a \neq b$ cerco A e B in modo che sia vera *

per definizione DUE POLINOMI SONO UGUALI se e solo se per ogni m x^m ha gli stessi coefficienti in ognuno dei due polinomi

$$= \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{x(A+B) - Ab - Ba}{(x-a)(x-b)}$$

Se voglio che valga, per il principio di identità dei polinomi deve essere che

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -Ab - Ba = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \rightsquigarrow B=-A \\ -Ab-Ba=1 \rightsquigarrow -Ab+Aa=1 \rightsquigarrow A(a-b)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\underbrace{a-b}_{\neq 0 \text{ perché } a\neq b}}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{a-b} = \frac{1}{b-a}$$

A questo punto

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int\left(\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{(x-b)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{(x-b)}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x-b}\right)$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\log|x-a| - \log|x-b|\right) + C_I$$

$$= \frac{1}{a-b}\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C_I$$

i valori ass. si tolgono a seconda dell'intervallo I scelto

Esempio: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$

$x^2-8x+15=0$

$x = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$

$x^2-8x+15 = (x-5)(x-3)$

$a=5,\ b=3$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+15} = \frac{1}{a-b}\cdot\log\left|\frac{x-a}{x-b}\right| \underset{+C}{=} \frac{1}{2}\cdot\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right| + C$$

$$\frac{1}{b-a}\lg\left|\frac{x-b}{x-a}\right|$$

$$-\frac{1}{a-b}\lg\left|\frac{x-b}{x-a}\right|$$

$$-\lg q = \lg\frac{1}{q}$$

Cosa succederebbe se scegliessi $a=3,\ b=5$?

Trovavo: $\displaystyle\frac{1}{3-5}\cdot\log\left|\frac{x-3}{x-5}\right| = -\frac{1}{2}\cdot\log\left|\frac{x-3}{x-5}\right|$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{x-3}{x-5}\right|\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right| + C.$$

---

3) denominatore senza radici reali e numeratore costante.

$\delta = 0$

$\Delta < 0$

CASO PRINCIPE $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow \arctan x + k$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C$$

generalizzando
$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}$$

$k \in \mathbb{R}$
$k \neq 0$

$$= \frac{1}{k^{\cancel{2}}} \cdot \int \frac{1}{1+y^2} \cdot \cancel{k}\, dy$$

$y = \frac{x}{k}$

$dy = \frac{dx}{k}$

$$= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}(y) + C$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) + C$$

Caso generale: denominatore ax^2+bx+c $a \neq 0$
senza radici reali, cioè $\Delta < 0$.

in realtà posso supporre che $a = 1$:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\, dx$$

Quindi guardo polinomi della forma x^2+bx+c.

$\Delta = b^2-4c < 0$ per $a = 1$

$$x^2+bx+c = \left(x^2+bx+\frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} + c$$

$$= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\overbrace{-b^2+4c}^{= -\Delta > 0}\right)$$

QUADRATURA del TRINOMIO

$ax^2+bx+c =$

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$

$a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x^2+\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$

$a\left(\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$

$$ax^2+bx+c$$
$$\parallel$$
$$a\left(\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$\int \frac{dy}{a\left(y^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)}$$

$$\frac{1}{a}\int \frac{dy}{y^2+k^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + k^2} \qquad k^2 = \frac{1}{4}(-b^2+4c) > 0$$

$y = x + \frac{b}{2}$

$dy = dx$

$$= \int \frac{1}{y^2+k^2}\, dy$$ e questo lo sappiamo fare.

$$= \frac{1}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{k}\right) + C$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{k}\right) + C.$$

Esempio: $$\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} =$$

$\Delta = 4 - 40 < 0$ $$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$$ $k^2 = 9 \Downarrow k = 3$

$y = x+1$

$dy = dx$

$$= \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right) + C.$$

(scegliendo $k = -3$ viene lo stesso risultato: $-\frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(-\frac{y}{3}\right) + C$

$= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right) + C.$)

$$\frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{9}_3} \operatorname{artg} \frac{x+1}{3}$$

derivo

$$\frac{1}{3} \frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\cancel{9}} \frac{1}{\frac{9+(x+1)^2}{\cancel{9}}}$$

CASO NUMERATORE MONOMIO DI PRIMO GRADO

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} \qquad a \neq 0$$

$$\cdot \; x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(x^2) \qquad \text{⓪} \int \frac{f'}{f} = \lg|f| + c$$

① $$\frac{1}{2a} \int \frac{2ax}{ax^2+bx+c}$$

② $$\frac{1}{2a} \int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

$$= \frac{1}{2a} \lg|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Rimane da vedere cosa succede quando il

$\delta \neq 0$ denominatore non è costante, cioè ha grado 1.

$a \neq 0$
$\delta \neq 0$

$$\int \frac{\delta x + \varepsilon}{a x^2 + bx + c}\, dx = \frac{\delta}{2} \cdot \int \frac{2x + \frac{2\varepsilon}{\delta}}{a x^2 + bx + c}\, dx$$

$$(a x^2 + bx + c)' = 2ax + b \qquad = \frac{\delta}{2a} \int \frac{2ax + b - b + \frac{2\varepsilon}{\delta} a}{a x^2 + bx + c}$$

$$= \frac{\delta}{2a} \underbrace{\int \frac{2ax + b}{a x^2 + bx + c}\, dx}_{\text{il numeratore è la derivata del denominatore}} + \frac{\delta}{2a} \underbrace{\int \frac{-b + \frac{2\varepsilon}{\delta} a}{a x^2 + bx + c}\, dx}_{\text{lo sappiamo fare}}$$

$$= \frac{\delta}{2a} \log |a x^2 + bx + c| + \frac{\delta}{2a} \int \frac{-b + \frac{2\varepsilon}{\delta} a}{a x^2 + bx + c}\, dx$$

Esempio:

$$\int \frac{4x + 5}{x^2 + 2x - 1}\, dx = 2 \int \frac{2x + 2 - 2 + \frac{5}{2}}{x^2 + 2x - 1}\, dx$$

$$(x^2 + 2x - 1)' = 2x + 2$$

$$= 2 \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x - 1}\, dx + \cancel{2} \int \frac{+\frac{1}{\cancel{2}}}{x^2 + 2x - 1}\, dx$$

$$= 2 \log |x^2 + 2x - 1| + \int \frac{1}{x^2 + 2x - 1}\, dx$$

sappiamo farlo.

RIPETIZIONE (piccola variante in 1°)

$$\int \frac{\delta x + e}{ax^2+bx+c} = \int \frac{\delta x}{ax^2+bx+c} + \underbrace{\int \frac{e}{ax^2+bx+c}}_{\text{SI SA CALCOLARE}}$$

1°

$$\parallel$$

$$\delta \int \frac{x \, 2a \cdot \frac{1}{2a}}{ax^2 + b \cdot x + c}$$

$\parallel$ per 2a, diviso 2a

$$(ax^2+bx+c)' = = 2ax + b$$

$$\frac{\delta}{2a} \int \frac{2ax + b - b}{ax^2+bx+c}$$

$\parallel$ più b meno b

$$\frac{\delta}{2a} \int \frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c} - \frac{\delta b}{2a} \underbrace{\int \frac{1}{ax^2+bx+c}}_{\text{si sa calcolare}}$$

2°

$\parallel$ derivata logaritmica

3°

$$\frac{\delta}{2a} \log|ax^2+bx+c| + k$$

Esempio: $\displaystyle\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx$

Facciamo la divisione:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} - \cancel{3x^4} + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + \cancel{x} + \cancel{3} & x^2-1 \\ \hline
-x^5 \qquad\quad + x^3 & x^3-3x^2+x-3 \\ \cline{1-1}
// \quad -3x^4 + x^3 + 0\cdot x^2 + x + 3 & \varphi(x) \\
\quad +3x^4 \qquad\quad -3x^2 & \\ \cline{1-1}
\quad // \quad + x^3 \quad -3x^2 + x + 3 & \\
\qquad -x^3 \qquad\quad +x & \\ \cline{1-1}
\qquad // \quad -3x^2 + 2x + 3 & \\
\qquad\quad +3x^2 \qquad -3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad // \quad 2x + 0 & R(x)
\end{array}
$$

$$\cancel{x^5} - x^3$$
$$-\cancel{3x^4} + 3x^2$$
$$x^3 - \cancel{x}$$
$$-3x^2 + \cancel{3}$$
$$+ 2\cancel{x}$$

$$x^5-3x^4+x+3 = (x^3-3x^2+x-3)(x^2-1)+2x$$

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{(x^3-3x^2+x+3)(x^2-1)+2x}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int (x^3-3x^2+x+3)\,dx + \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$y = x^2 \longrightarrow \int \frac{dy}{y-1}$$

$$\lg|x^2-1| + k$$

$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + \log|x^2-1| + C_I$$

Esempi "riassuntivi"

FUNZIONI RAZIONALI IN SENO E COSENO

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$.

2 modi: (1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx =$

$y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x$

$dy = -dx \sin x$

$$= -\int \frac{dy}{1-y^2} = -\int \frac{1}{(1+y)(1-y)}\,dy$$

$$= -\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log|1+y| - \log|1-y|\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \log\sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|} + C$$

$$= \boxed{\log\sqrt{\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|} + C.}$$

$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} =$

$= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} =$

$= \cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) =$

$= \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$

$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} =$

$= \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

$1 + \operatorname{tg}^2 z =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 z}$

$\cos 2q =$

$= \cos^2 q - \sin^2 q$

$\displaystyle\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^3}$

(2) formule parametriche:

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

tale sostituzione funziona per $\dfrac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$ $\quad P(u,v)\ Q(u,v)$ POLINOMI

riducendo la ricerca di primitive

$\dfrac{\tilde{P}(t)}{\tilde{Q}(t)}$

$\dfrac{1+t^2 - 1 + t^2}{1+t^2+2t} \cdot \dfrac{2}{1+t^2}$

$t' = \frac{1}{2}(1+t^2)$

$$* \int \frac{1-\cos x}{1+\sin x} \qquad \int \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

La sostituzione $\underline{t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{dt}{dx} = \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}(1+t^2)$

$$\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\cdot\frac{\cancel{2}dt}{\cancel{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \boxed{\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C}$$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Usando le f. parametriche si vede che effettivamente*

$$* \quad \left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| = \sqrt{\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|}.$$

$$* \quad \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{4t^2}{\cancel{(1+t^2)^2}}\frac{1}{\frac{(1+\cancel{t^2}+1-\cancel{t^2})^2}{\cancel{(1+t^2)^2}}} = \frac{4t^2}{4} = t^2$$

- $$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{(e^x)^2}{1+e^x}\,e^x dx = \int \frac{y^2}{1+y}\,\frac{dy}{y} = \int \frac{y}{1+y}\,dy =$$

$\left(y = e^x \quad dy = e^x \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dy}{e^x} = \frac{dy}{y} \right)$

$$= \int \frac{y+1-1}{y+1}\,dy = \int dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy = y - \log|y+1| + C = e^x - \log(e^x+1) + C$$

FUNZIONI RAZIONALI in e^x (in e^x e e^{-x}, $\frac{1}{e^x}$)

- $$\int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g}\,dx = Fg - \int Fg'\,dx = e^x \cdot \cos x - \int e^x\cdot(-\sin x)\,dx = e^x\cos x + \int \underbrace{e^x}_{f}\underbrace{\sin x}_{g}\,dx$$

$F = e^x \quad g' = -\sin x$

$$2\int e^x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\,e^x + C$$

$$\int \underset{g}{e^x}\,\underset{f}{\cos x} = \sin x \cdot e^x - \int \underset{F}{\sin x}\,\underset{g'}{e^x} = \sin x\, e^x - \left[-\cos x\, e^x - \int (-\cos x)\, e^x\right] =$$

$\sin x\, e^x + \cos x\, e^x - \int \cos x\, e^x$

$F = e^x \quad g' = \cos x$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

Quindi $\quad 2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\cos x + \sin x)$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x).$$

- $\displaystyle\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx \underset{y=\sqrt{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \int y \cdot e^y \, 2y\,dy = 2\int \underbrace{y^2}_{g} \cdot \underbrace{e^y}_{f} dy$

$F = e^y$
$g' = 2y$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \longrightarrow dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow dx = 2y\,dy$

$$= 2\left(e^y \cdot y^2 - \int e^y \cdot 2y\,dy\right) = 2e^y \cdot y^2 - 4\int \underbrace{y}_{g} \cdot \underbrace{e^y}_{f} dy$$

$F = e^y$
$g' = 1$

$$= 2y^2 e^y - 4\left(e^y \cdot y - \int e^y \cdot 1\,dy\right)$$

$$= 2y^2 e^y - 4y e^y + 4e^y + C$$

$\boxed{y = \sqrt{x}}$ ULTIMO PASSAGGIO

$$= 2x e^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C.$$

deg $p = n$
p polinomio

$$\int p(x)\, e^x \, dx$$

faccio n integrazioni per parti derivando sempre il fattore polinomiale finché non rimane costante

---

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1}$$

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} dx = 2\int \sqrt{x}\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\int x e^{\sqrt{x}}\, d(\sqrt{x})$$

PRIMITIVE SU UN INTERVALLO

1) $\int \frac{1}{ax+b} \longrightarrow \log|ax+b| + k$

2) $\int \frac{1}{(ax+b)^n} \xrightarrow{n>1} -\frac{1}{(n-1)} \cdot \frac{1}{a} \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + K$

3) $\int \frac{1}{ax^2+b} \xrightarrow{a,b>0} \frac{1}{b}\sqrt{\frac{b}{a}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\, x\right) + k$

4) $\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \xrightarrow{\alpha \neq \beta} \frac{1}{\alpha-\beta} \log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + k$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} \xrightarrow{a \neq 0} \begin{cases} b^2-4ac>0 & \text{ridursi a 4)} \\ b^2-4ac=0 & \text{" a 2)} \\ b^2-4ac<0 & \text{" a 3)} \end{cases}$$

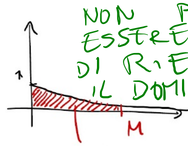
$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{1}{a} \log|ax^2+bx+c| - b \int \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

Integrali impropri (o generalizzati)

estendono la definizione di integrale definito al caso in cui l'integranda non è limitata, oppure anche l'intervallo di integrazione non è limitato.

Esempio: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

intuitivamente rappresenta l'area di tutto il sottografico sopra $[0,+\infty)$



$\int_0^M e^{-x}\,dx$

NON POSSON ESSERE INTEGR. DI RIEM. POICHÉ IL DOMINIO È ILLIMITATO

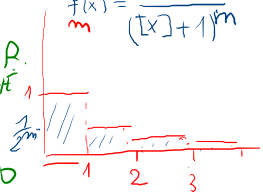
Formalmente definiremo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \overset{def}{=} \lim_{M\to+\infty}\int_0^M e^{-x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^M = \lim_{M\to+\infty} -e^{-M}+1 = 1$$

In questo caso il sottografico sopra $[0,+\infty)$ ha area finita, $= 1$.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{x+1}\,dx \overset{def}{=} \lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{1}{x+1}\,dx = \lim_{M\to\infty}\lg(x+1)\Big]_0^M = \lim_{M\to\infty}\lg(M+1) = +\infty$$

$$f_m(x) = \frac{1}{([x]+1)^m}$$



$$\int_0^3 f_m(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx + \int_1^2 \frac{1}{2^m}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{3^m}\,dx = 1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}$$

Osservo che

$$\frac{1}{(x+1)^m} \overset{\circ}{\le} f_m(x) \overset{*}{\le} \frac{1}{x^m} \qquad x\ge 1$$

$m>1$

$$\int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{M\to\infty} 1+\frac{1}{2^m}+\dots+\frac{1}{(M-1)^m} \overset{*}{\le} 1+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^m} < \infty \quad \square$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^0} = +\infty$$

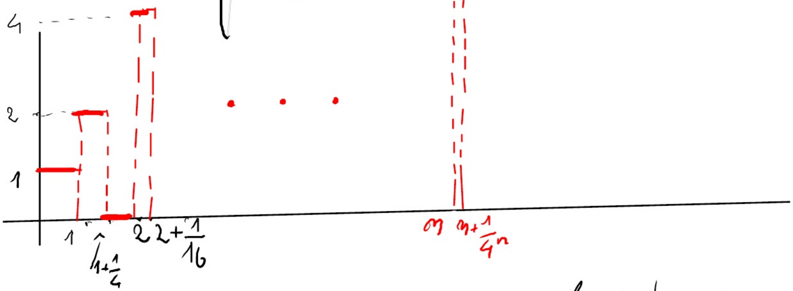
$x\ge 1$ $\quad m>1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^m} \overset{def}{=} \lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{dx}{x^m} = \lim_{M\to\infty} -\frac{1}{m-1}x^{1-m}\Big]_1^M = \lim_{M\to\infty}\left[\frac{1}{1-m}\cdot\frac{1}{M^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\right] = \frac{1}{m-1} < +\infty \quad \square$$

Per $m=1$ per esempio: $\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{M-1} \overset{\circ}{\ge} \lim_{M\to+\infty}\log(M+1) = +\infty$

Esempio sia funzione che dominio non limitati ma "aree finite":

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & n \leq x \leq n + \frac{1}{4^n} \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \end{cases}$$



$\int_0^{n+1} f(x)dx =$ somme aree rettangoli di basi lunghe $\frac{1}{4^n}$ e altezze 2^n $=$

$$= \frac{1}{4^0}\cdot 2^0 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{16}\cdot 4 + \dots + \frac{1}{4^n} 2^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} =$$

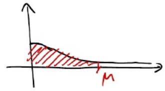
$$\overset{*}{=} \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

*prodotto notevole

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^{n+1} f(x)\,dx = 2$$

Esempio: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$



$$= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{1}{1+x}\,dx$$

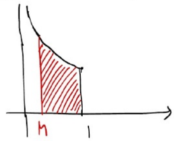
$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\log(1+x)\right]_0^M = \lim_{M\to+\infty} \left(\log(1+M) - 0\right) = +\infty$$

In questo caso l'area del sottografico è infinita.

Esempio: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata su $[0,1]$)

NON PUÒ ESSERE UN INTEG. DI RIEMANN POICHÉ LA FUNZIONE È ILLIMITATA

$$= \lim_{M\to0^+} \int_M^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$



$$= \lim_{M\to0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_M^1$$

$$= \lim_{M\to0^+} \left(2 - 2\sqrt{M}\right) = 2$$ e questa è l'area del sottografico di $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sopra a $[0,1]$

Esempio: $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ (il disegno è simile al caso precedente)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \overset{def}{=} \lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \alpha=1 \\ \frac{1}{1-\alpha} < +\infty & \alpha>1 \\ +\infty & \alpha<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$\alpha > 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \overset{def}{=} \lim_{M\to0^+} \int_M^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\log M & \alpha=1 \\ \lim_{M\to0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{M^{\alpha-1}}\right) & \alpha\neq1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \alpha=1 \\ +\infty & \alpha>1 \\ \frac{1}{1-\alpha} < +\infty & \alpha<1 \end{cases}$$

$$= \lim_{M \to 0^+} \int_M^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M \to 0^+} \left[\log(x)\right]_M^1 =$$

$$= \lim_{M \to 0^+} \left(0 - \log(M)\right) = +\infty$$

quindi in questo caso il sottografico ha area infinita.

Definizione generale: (analogo se $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ $f:(a;b] \to \mathbb{R}$)

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ e $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ che sia integrabile nel senso di Riemann in tutti gli intervalli $[a,M]$ con $a<M<b$

Ip. f int. su $[M;b]$ $\forall M \in (a;b]$

def $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{M \to a^+} \int_M^b f(t)\,dt$

Se esiste

$$\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\,dx = L$$

definiamo $\int_a^b f(x)\,dx \overset{def}{=} L$.

Se L è reale finito, si dice che l'integrale di $f(x)$ su $[a,b)$ converge (oppure che $f(x)$ è integrabile "in senso generalizzato" o "in senso improprio" su $[a,b)$)

Se $L = +\infty$ si dice che l'integrale diverge positivamente (o "a $+\infty$")

Se $L = -\infty$ si dice che l'integrale diverge negativamente (o "a $-\infty$")

Esempi visti sopra: $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge,

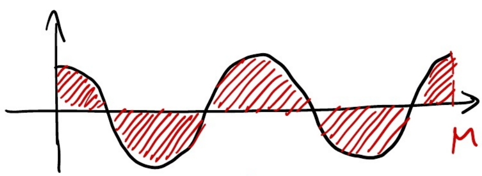
$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$ diverge positivamente,

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge positivamente.

Esempio in cui il limite non esiste: $a=0$, $b=+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \cos(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} [\sin(x)]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} (\sin(M) - 0)$$ e questo non esiste.



Quindi i casi sono tre

1) l'integrale "improprio" esiste finito
2) " " " infinito
3) " " NON ESISTE

Proposizione $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$

Se $f : [a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$

è integrabile su $[a;M]$ $\forall M \in [a;b)$

e f è di segno costante

in un intorno sinistro di b

allora $\exists \int_a^b f(t)\,dt \in \overline{\mathbb{R}}$

DIM non è riduttivo supporre $f \geq 0$ su $[c;b)$ per qualche $c \in [a;b)$.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt. \quad \text{Per } x \geq c$$

Se $c \leq x \leq y < b$

$$\int_c^y f(t)\,dt = \int_c^x f + \int_x^y f, \qquad \int_x^y \geq 0$$

$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ è crescente su $[c;b)$

Quindi $\exists \lim_{x \to b} \int_c^x f(t)\,dt = \sup_{c \leq x < b} \int_c^x f(t)\,dt$ per cui

$$\exists \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \sup_{c \leq x < b} \int_c^x f(t)\,dt \qquad \blacksquare$$