OSSERVAZIONE

se F è una primitiva di f su $[a;b]$

e $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ $\alpha \neq 0$

allora

$a \leq \alpha x + \beta \leq b$

$a - \beta \leq \alpha x \leq b - \beta$

$\frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$ è

una primitiva di g su $\begin{cases} \left[\frac{a-\beta}{\alpha}; \frac{b-\beta}{\alpha}\right] & \alpha > 0 \\ \left[\frac{b-\beta}{\alpha}; \frac{a-\beta}{\alpha}\right] & \alpha < 0 \end{cases}$

i.e.

$$\int^{z} g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int^{\alpha z + \beta} f(x)\,dx$$

$$\int^{z} \underbrace{\alpha}_{\varphi'} f(\underbrace{\alpha x + \beta}_{\varphi})\,dx = F(\alpha z + \beta) + c$$

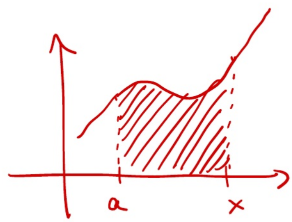
Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua.

Allora la funzione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (funzione integrale)

è una primitiva di f, cioè $F(x)$ è derivabile

e $\exists\, F'(x) = f(x)$. $\forall x \in I$



Dim: mostriamo che F è derivabile calcolandone il rapporto incrementale in $x_0 \in I$ arbitrario, e poi facendo il limite.

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \cdot \left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \right) = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^{a} + \int_a^{x} \right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \cdot \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

è la media integrale di f sull'intervallo di estremi x e x_0.

Visto che f è continua, per il teorema della media integrale $\exists\, z(x)$ (strettamente) compreso tra x_0 e x

t.c. $\quad f(z(x)) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \quad (z \neq x_0)$

Quindi $\quad F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z(x)) = f(x_0)$

$z(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} x_0$ $\qquad$ per continuità

Cambio variabile ponendo $y = z(x)$. Devo capire a cosa tende y quando $x \to x_0$.

So che $z(x)$ è compreso tra x_0 e x

(ad esempio se $x \le x_0$, so $\quad x \le z(x) \le x_0$)

quindi per il teorema dei carabinieri ho

$$\lim_{x\to x_0} z(x) = \lim_{x\to x_0} y = x_0 .$$

per continuità di f.

Segue che $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(z(x)) = \lim_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)$.

Questo dimostra che $F'(x_0) = f(x_0)$, quindi

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I .$$

In particolare si riottiene quanto dimostrato [redacted] con Lagrange

Teorema di Torricelli

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ funzione continua, $a \in I$.

Se G è una primitiva di f su I, allora $\exists k \in \mathbb{R}$

t.c. $\quad G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + k$, e $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha) \quad \alpha, \beta \in I$

Corollario alla dimostrazione

Se f è R. integrabile su $[a;b]$, $x_0 \in [a;b]$, ed <u>f è continua in x_0</u>

allora

$$\exists \; \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)\Bigg|_{x=x_0} = f(x_0)$$

<u>DIM</u>

$$\left|\frac{\int_a^{\overbrace{x_0+h}^{x}} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{\underbrace{h}_{x-x_0}} - f(x_0)\right| =$$

$$3 = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} 3\,dt$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt\right| \le \frac{1}{|h|}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}\left|f(t)-f(x_0)\right|dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\cancel{|h|}}\sup_{|t-x_0|\le|h|}\left|f(t)-f(x_0)\right| \cdot \cancel{\left|\int_{x_0}^{x_0+h} 1\cdot dt\right|} = \underline{\sup_{|t-x_0|\le|h|}\left|f(t)-f(x_0)\right|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

x_0+h , x_0-h

il fatto che

$$\sup_{|t-x_0|\leq|h|} |f(t)-f(x_0)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$x_0-|h|\leq t\leq x_0+|h|$

equivale alla continuità di f in x_0:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall t\in[a,b]\ |t-x_0|\leq\delta \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

quindi

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall h\ |h|\leq\delta \Rightarrow \underbrace{\forall t\left(|t-x_0|\leq|h| \Rightarrow |f(t)-f(x_0)|\leq\varepsilon\right)}_{\Updownarrow}$$

$$\sup_{|t-x_0|\leq|h|} |f(t)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

$\blacksquare$

Prime regole di integrazione

per parti e sostituzione

$$\shortparallel$$

Regole di derivazione

prodotto e della composizione

Osservazione

non è detto che

se f è integrabile su $[a;b]$

la $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt \quad x, \alpha \in [a;b]$

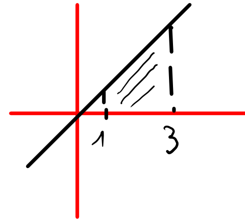
sia primitiva di f su $[a;b]$

per il semplice fatto che $F(x)$ potrebbe non aver derivata nei punti ove f è discontinua e $\forall \alpha, \beta \in I$ abbiamo

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Notazione: $[G(x)]_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

Esempio: $\int_1^3 x\,dx$. Una primitiva di $f(x) = x$ è $G(x) = \frac{x^2}{2}$



Quindi $\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$

(se prendevamo un'altra primitiva, ad esempio $F(x) = \frac{x^2}{2} + 1$, trovavo

$$\int_1^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 1\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \cancel{1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \cancel{1}\right) = $$
$$= \frac{8}{2} = 4. \quad).$$

Integrali con estremi variabili

Teorema: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha, \beta: A \to I$ derivabili.

Sia $$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt .$$ $\alpha(x), \beta(x) \in I$ ← dom f

Allora $G(x)$ è derivabile, e si ha

poiché $F' = f$

$$G'(x) \overset{*}{=} f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) .$$

In particolare se $\alpha(x) = a$ costante e $\beta(x) = x$, si ha $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, e la formula da

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) =$$
$$= f(x) \cdot 1 - f(a) \cdot 0 = f(x)$$

(come nelle conclusione del t. fondamentale)

Esempio: $$G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \cdot \operatorname{arctg}(t)\,dt$$

$f(t) = e^t \operatorname{arctg}(t)$
$\alpha(x) = x^2$
$\beta(x) = \sin x$.

Abbiamo $$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$
$$= e^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}(\sin(x)) \cdot \cos x - e^{x^2} \cdot \operatorname{arctg}(x^2) \cdot 2x .$$

Applicazione: $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} e^t \operatorname{arctg}(t)\,dt}{\sin(x^4)} = \frac{\int_0^0 (\dots)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$$

DIM. dato $a \in I$

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{\beta(x)} f(t)\,dt$$
$$= \int_a^{\beta(x)} f(t)\,dt - \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

è differenza di composizione di funzioni derivabili

i.e. $F(y) = \int_a^y f(t)\,dt$

con $y = \beta(x)$ e $y = \alpha(x)$

$F'(y) = f(y)$

$(F \circ \beta)' = F' \circ \beta \cdot \beta'$

$(F \circ \alpha)' = F' \circ \alpha \cdot \alpha'$ *

OSS. se f è integrabile f è limitata

$$\left| \int_0^{x^2} f(t)\,dt \right| \le \int_0^{x^2} |f(t)|\,dt$$
$$\le \sup|f| \cdot x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Usiamo de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\cdot \operatorname{arctg}(x^2)\cdot 2x - \cancel{e^0\cdot \operatorname{arctg}(0)\cdot 0}}{\cos(x^4)\cdot 4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x^2}}{\cos(x^4)}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}(x^2)\cdot \cancel{x}}{2x^{\cancel{3}\,2}}}_{\frac{1}{2}} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Integrazione per parti

← derivata del prodotto

$f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, f continua e g di classe C^1. Se F è una primitiva di f, allora

$$\int f\cdot g\,dx = F\cdot g - \int F\cdot g'\,dx$$

(cioè g è derivabile e g' è una funzione continua)

Dim: $(Fg)' = \underbrace{F'}_{=f} g + F\cdot g' = fg + Fg'$

integrando ambo i membri ottengo

$$\underbrace{\int (F g)' \, dx}_{= F\cdot g} = \int f g \, dx + \int F \cdot g' \, dx$$

Quindi $\displaystyle \int f g \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx$. $\blacksquare$

<u>Esempio</u> : $\displaystyle \int \underbrace{x}_{g} \cdot \underbrace{\sin x}_{f} \, dx = F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx$ $\quad F = -\cos x$, $g' = 1$

$$= -\cos x \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + k$$

(controllate il risultato derivandolo !)

<u>Esempio</u> : $\displaystyle \int \log x \, dx = \int (\underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\log x}_{g}) \, dx$ $\quad F = x$, $g' = \dfrac{1}{x}$

$$= F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx = x \cdot \log x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$(x \log x - x)' = (x \log x)' - x' = x' \log x + x (\log x)' - 1$ $= x \cdot \log x - x + k$.

$= \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \log x$

<u>Esempio</u> : $\displaystyle \int \cos^2 x \, dx = \int \underbrace{\cos x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g} \, dx$ $\quad F = \sin x$, $g' = -\sin x$

$$= F g - \int F \cdot g' \, dx = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \, (-\sin x) \, dx$$

$= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$ $\qquad (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

$\underbrace{1-\cos^2 x}_{\sin^2 x}$

$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$

Portando a primo membro e risolvendo

ottengo: $2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x$

$\rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \left(\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right) + k$

$(\sin x \cos x)' + x' = \sin x(-\sin x) + \cos x \cos x + 1 = -\sin^2 x + \cos^2 x + 1 = 2\cos^2 x$

Oss: $(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (sto supponendo $f(x) > 0$)

quindi $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log(f(x)) + k$.

Esempio: $\int \operatorname{arctg}(x) \, dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}(x)}_{g} \, dx =$ $\qquad F = x$, $g' = \frac{1}{1+x^2}$

$= Fg - \int F g' \, dx = x \cdot \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int 2x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx$

$= x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + k$

INTEGRAZIONE PER PARTI DI INTEGRALI DEFINITI

$F' = f$

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\,dt$$

esempio $n \neq m$ $\quad \int_0^{2\pi} \cos nt \sin mt \,dt = 0$:

$$\int_0^{2\pi} \underset{f}{\cos nt} \cdot \underset{g}{\sin mt}\,dt =$$

$$F(t) = \frac{1}{n}\sin nt \qquad g'(t) = m\cos mt$$

$$= \cancel{\frac{1}{n}\sin 2\pi n \sin 2\pi m - \frac{1}{n}\sin 0 \sin 0}$$

$$- \frac{m}{n}\int_0^{2\pi} \underset{f}{\overset{F}{\sin nt}} \, \underset{g}{\overset{g'}{\cos mt}}\,dt =$$

$$F(t) = -\frac{1}{n}\cos nt \qquad g'(t) = -m\sin mt$$

$$= -\frac{m}{n}\left[-\frac{1}{n}\cancel{\cos 2\pi n \cos 2\pi m} + \frac{1}{n}\cancel{\cos 0 \cdot \cos 0} - \frac{m}{n}\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \sin mt\right.$$

$$= \frac{m^2}{n^2}\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \sin mt\,dt \qquad \frac{m^2}{n^2} \neq 1$$

Per $n = m$ così non viene

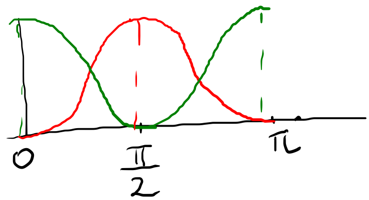
$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot \sin nt \, dt = \dots$$

$\longrightarrow$ cambiamento di variabili esempio

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \sin x \cdot \sin x\,dx$$

$$= \cancel{-\cos x \cdot \sin x \Big]_0^\pi} - \int_0^\pi -\cos x \cdot \cos x\,dx =$$

$$\overset{*}{=} \int_0^\pi \cos^2 x\,dx \;\ldots\ldots$$



$$2\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx + \int_0^\pi \sin^2 x\,dx =$$

$$\overset{*}{=} \int_0^\pi \sin^2 x\,dx + \int_0^\pi \cos^2 x\,dx =$$

$$= \int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^\pi 1 \cdot dx = \pi$$

Quindi

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Integrazione per sostituzione (CAMBIO DI VARIABILE DI INTEGRAZIONE)

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

$\varphi: J \to I$ di classe C^1. Se F è una primitiva di f, allora

$$\boxed{\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \, dx = (F \circ \varphi) + k}$$

regola derivata composizione

Riscriviamo con le primitive la regola

Dim: $(F \circ \varphi)' = (F'(\varphi)) \cdot \varphi' \overset{F' = f}{=} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$

per la regola di derivazione di funzioni composte. Integrando trovo

della derivata della composizione

$$\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \, dx = \int (F \circ \varphi)' \, dx = (F \circ \varphi) + k$$

$x = \frac{1}{2}(2x)$ [redacted]

Esempio: $\int x e^{x^2} dx$. Poniamo $\varphi(x) = x^2$

non si sa scrivere element. $\int e^{x^2}$

$\varphi'(x) = 2x \rightsquigarrow x = \frac{\varphi'(x)}{2}$

$$= \int \frac{\varphi'(x)}{2} \cdot e^{\varphi(x)} \, dx$$

ponendo $f(t) = \frac{e^t}{2}$

NO PER PARTI!

$$= \int \varphi'(x) \cdot f(\varphi(x)) \, dx = (F \circ \varphi) + k =$$

$$\left(F(t) = \int \frac{e^t}{2} dt = \frac{e^t}{2} + k \right)$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2} + k$$

CAMBIO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI DEFINITI

$f : [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$, continua

$\varphi : [a;b] \to [\alpha;\beta]$, derivabile con φ' continua

$x'(t)\,dt \to dx$

$\int_a^b f(x(t))\,x'(t)\,dt$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

$1°$ $\qquad 2°$

NOTA: anche se $\varphi(a) \geq \varphi(b)$!

$d?$

$$\int_{c?}^{d?} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \quad 2°$$

$$\|$$

$$\int_\gamma^\delta f(x)\,dx \quad 1°$$

$c \quad d$

$\gamma = \varphi(c)$

$\delta = \varphi(d)$

esempio $\left(\frac{1}{1+x}\right)(e^t)$

$g(t) = \frac{1}{1+e^t}$ $\qquad \varphi(t) = e^t$ $\qquad \varphi'(t)$

$$\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dt = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{e^t+1}\cdot\frac{1}{e^t}}_{f(\varphi(t))}\,\underbrace{e^t\,dt}_{dx} = \qquad x = e^t \qquad \frac{dx}{dt} = e^t$$

$$= \int_{1 = e^0}^{e = e^1} \underbrace{\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}}_{f(x)}\,dx = \int_1^e \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \int_1^e \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \log e - \log 1 - \log(e+1) + \log 2 = \log\frac{2e}{e+1}$$

$$\frac{1}{1+e^t} = $$

$$= Q \cdot e^t$$

esempio $n \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \underbrace{\sin nx}_{y}\, dx = \frac{1}{n}\int_{0=\sin n\cdot 0 \;\; y(0)}^{0=\sin 2\pi n \;\; y(2\pi)} y\,dy = 0$$

$$\cos nx\, dx = \frac{1}{n}dy$$

$y = \sin nx$

$$\frac{dy}{dx} = n\cos nx$$

esempio

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int_{\cos 0}^{\cos 2\pi} e^y dy = -\int_1^1 e^y dy = 0$$

$$-e^y \cdot \underbrace{y'dx}$$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\,dx$

esempio

$y = \cos x \quad y' = -\sin x$

$$\int_0^{\pi} e^{\cos x}\underbrace{\sin x\,dx}_{-dy} =$$

$y = \cos x$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin x$$

$$= -\int_{1 \;\; \cos 0}^{-1 \;\; \cos\pi} e^y dy = -(e^{-1} - e) = e - \frac{1}{e}$$

Metodo pratico:

$$\int x e^{x^2} dx = $$

pongo $\boxed{t = x^2}$ (funzione di x)

$t = t(x)$

$t' = \frac{dt}{dx}$

$x\,dx = \frac{dt}{2}$ $\quad t' = \frac{dt}{dx} = 2x$

$\rightsquigarrow dt = 2x\,dx$

$\frac{dt}{2}$

$$\frac{dt}{2} = x\,dx$$

$e^t \cancel{\frac{dt}{dx}} \frac{1}{2} \cancel{dx}$

$e^{x^2} \; x \; dx$

$$= \int e^t \cdot \frac{dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + k$$

e si torna in x sostituendo $t = x^2$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + k$$

Se voglio calcolare $\int_0^2 x e^{x^2} dx$, 2 modi:

1. Calcolare $\int x e^{x^2} dx$. Abbiamo visto che è $\frac{1}{2} e^{x^2} + k$.

   Poi $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} + k\right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$

2. Usare la sostituzione, ricordandosi di cambiare gli estremi:

   $\int_0^2 x e^{x^2} dx$. Pongo $t = x^2 \rightsquigarrow \frac{dt}{2} = x\,dx$

   $0 \rightsquigarrow 0 \qquad 2 \rightsquigarrow 4$

Quindi $\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_{0 = 0^2}^{4 = 2^2} \frac{e^t}{2} dt$ $x=0 \rightsquigarrow t = 0^2 = 0$, $x = 2 \rightsquigarrow t = 2^2 = 4$

$$= \left[\frac{e^t}{2} + k\right]_0^4 = \frac{e^4}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Esempio: $\int \frac{tg\,x}{\cos^2 x} dx = \int \boxed{\frac{\sin x}{\cos^3 x} dx}$ $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) + m\pi$

$t = \cos x$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$dt = -\sin x\, dx$

$$= \int -\frac{dt}{t^3} = -\int t^{-3} dt = -\frac{1}{-3+1} \cdot t^{-2} + k$$

$$= \frac{1}{2} t^{-2} + k$$

$t = \cos x$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + k$$

$(tg\,x)' = 1 + (tg\,x)^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int tg\,x\,(tg\,x)' = \frac{1}{2}(tg\,x)^2 + c$

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + (tg\,x)^2$

Esempio: 1° $\int \sqrt{1-x^2}\, dx =$ $|x| \leq 1$ $-1 \leq x \leq 1$

$x = \sin t$ $(t = \arcsin x)$ $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = \cos t} \rightsquigarrow \boxed{dx = \cos t\, dt}$

2° $= \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\, dt$

$$= \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\, dt = \int |\cos t| \cdot \cos t\, dt =$$

(~~supponiamo~~ visto che $\cos t \geq 0$ nell'intervallo in cui stiamo integrando)

$$= \int \cos^2 t\, dt = \frac{t + \sin t \cos t}{2} + C =$$

(ricordando che $t=\arcsin x$, e quindi

$$\cos(t)=\sqrt{1-\sin^2(t)}=\sqrt{1-x^2}\;)$$

grafico $\sqrt{1-x^2}$

$$=\frac{\overset{t}{\arcsin x}+x\cdot\overset{\sin t\ \ \cos t}{\sqrt{1-x^2}}}{2}+c.$$

Applicazione: area del cerchio unitario.

$x=\sin t$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$

grafico di $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$$\text{Area cerchio unitario}=4\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$\frac{1}{4}$ cerchio unitario
"
$\{(x,y): x\in[0,1],\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$

$$=4\cdot\left[\frac{\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_0^1=$$

$$=4\cdot\left(\frac{\arcsin(1)+\cancel{1\cdot 0}}{2}-\frac{\cancel{\arcsin(0)+0\cdot 1}}{2}\right)$$

$$=4\cdot\frac{\arcsin(1)}{2}=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin(x)+k$$ visto che

$$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}}$$

Oss: ho anche $(\arccos(x))'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

quindi $$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\arccos(x)+k'$$

Segue che $\arcsin(x) - (-\arccos(x)) =$

$= \arcsin(x) + \arccos(x)$ e' costante.

Per vedere quanto vale basta calcolarla in $x=0$,

e trovo $\arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$

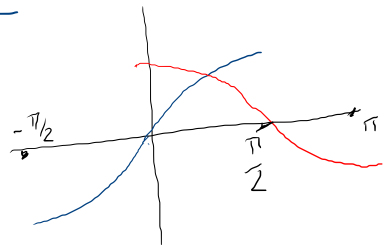
Quindi $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$.

Deduzione diretta dalla definizione

$$\arcsin : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$$

$$0 \le y \le \pi \iff -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - y \le \frac{\pi}{2}$$



$$x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$\arccos x = y$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\arccos x + \arcsin x = y + \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2}$$