ANCORA INTEGRALI IMPROPRI

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$

Abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,M]$ con $a<M<b$.

Analogamente si definisce $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ con $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, e f integrabile su $[M,b]$ $\forall\, a<M<b$,

come $\displaystyle\lim_{M\to a^+} \int_M^b f(x)\,dx$ (se esiste).

E se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ "ha un problema" in entrambi a e b?

ad esempio: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$, oppure $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

<u>Def</u>: sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ con $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, che sia integrabile su $[M_1, M_2]$ con $a<M_1<M_2<b$.

Scegliamo arbitrariamente $c \in (a,b)$.

<u>Se</u> esistono entrambi gli integrali impropri $\displaystyle\underset{L_1}{\underset{\parallel}{\int_a^c f(x)\,dx}}$ e $\displaystyle\underset{L_2}{\underset{\parallel}{\int_c^b f(x)\,dx}}$

allora si definisce

$(a;c]$ $\qquad$ $[c;b)$

Osservazione 0

Se f è Riem. int. in $I=[a;b]$ $c\in[a,b]$ allora

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

è continua

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_c^x - \int_c^y\right| =$$

$$= \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_y^x |f(t)|\,dt\right|$$

$$\leq \sup_I |f|\,|x-y|$$

Osservazione 1

$f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$
integrabile in senso improprio

$$\exists \lim_{M \to b^-} \int_a^M f(t)\,dt =_{def} \int_a^b f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R} \quad (\text{è finito})$$

si ha

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\,dt = 0$$

OSS 2

PROVA $\underbrace{\lim_{M \to b^-} \int_a^M}_{L} = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x + \int_x^b$

$\forall x \quad L - \int_a^x = \int_x^b \longrightarrow 0$

$0 \xleftarrow[x \to b^-]{} L - \int_a^x$

Osservazione 2

$$f : [a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

int. in senso improprio

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

$$c \in [a;b)$$

$$\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(t)\,dt = \lim_{\substack{M \to b^- \\ M > c}} \int_a^c + \int_c^M$$

$$= \int_a^c + \lim_{M \to b^-} \int_c^M = \int_a^c + \int_c^b$$

$$\left(\lim_{M \to b^-} \int_a^M \right) - \int_a^c = \lim_{M \to b^-} \left(\int_a^M - \int_a^c \right) = \lim_{M \to b^-} \int_c^M$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_1 + L_2$$ se la somma non è indeterminata (cioè non è $+\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$)

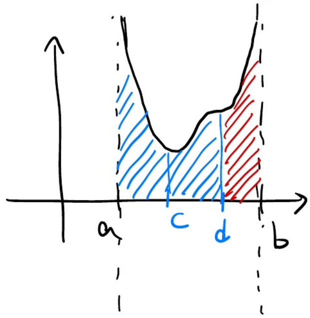
e si dice che

f è integrabile (in senso improprio) su (a,b).

<u>Oss 3</u>: l'esistenza e il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$

non dipendono dalla scelta di $c \in (a,b)$.

Infatti, se scelgo $d \in (a,b)$,



ho che

$M \to a^+$

$$\int_{\cancel{a}\,M}^d f(x)\,dx = \int_{\cancel{a}\,M}^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

$N \to b^-$

$$\int_d^{\cancel{b}\,N} f(x)\,dx = \int_d^c f(x)\,dx + \int_c^{\cancel{b}\,N} f(x)\,dx$$

Sommando queste due equazioni ottengo

$$\int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x) + \underbrace{\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx}_{=0}$$

Osservazione 4

in altri termini se $f : (a;b) \to \mathbb{R}$

è tale che

I) f è Riemann integrabile
su $[M;N]$ per ogni $M, N \in (a;b)$

II) per $c \in (a;b)$ si può fare

$$\underbrace{\lim_{M \to a^+} \int_M^c f(t)\,dt}_{\in \overline{\mathbb{R}}} + \underbrace{\lim_{N \to b^-} \int_c^N f(t)\,dt}_{\in \overline{\mathbb{R}}}$$

cioè

II.1 i due limiti esistono in $\overline{\mathbb{R}}$ separatamente

II.2 se ne può fare la somma

si dice che la funzione è integrabile in senso improprio su $(a;b)$, e tale somma si dice

INTEGRALE IMPROPRIO DI f SU $(a;b)$: $\int_a^b f(t)\,dt$

osservazione 4bis

$f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Riemann integrabile

allora

$\tilde{f} := f|_{(a;b)} : (a;b) \to \mathbb{R}$

è integrabile in senso improprio

$$\int_a^b \tilde{f}(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

$$\underbrace{\sup|f|\,(b-M)}_{\to 0} \geq \lim \int_M^b |f(t)|\, dt \geq \lim_{M\to b} \left| \int_M^b f(t) \right| = 0$$

Esempio: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Scelgo $c=0$.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{M\to-\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_M^0$$

$\exists$

$$= \lim_{M\to-\infty} [0-\operatorname{arctg}(M)]$$

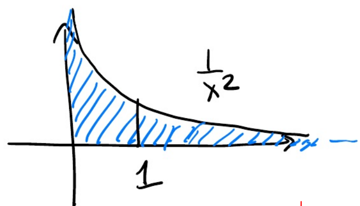
$$= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = (\text{stessi conti}) = \lim_{M\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^M =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \operatorname{arctg}(M) = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (converge).

Esempio: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$



Scegliamo $c=1$.

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to0^+} \int_{M}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to0^+} \left[\cancel{-\frac{1}{3}x^{-3}}\right]_M^1 =$$

$-\frac{1}{x}$

$\exists$

$$= \lim_{M\to0^+} \left[-\frac{1}{\cancel{3}} + \frac{1}{\cancel{3}\cdot M^{\cancel{3}}}\right] = +\infty$$

diverge.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{1}^{M} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\cancel{-\frac{1}{3}x^{-3}}\right]_1^M = 1 - \frac{1}{M}$$

$-\frac{1}{x}$

osservazione 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & 0 < x \leq 1 \\ \sin x & x > 1 \end{cases}$$

$$\nexists \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$$

poichè $c > 0$ $\nexists \int_c^{+\infty} f(t)\,dt$

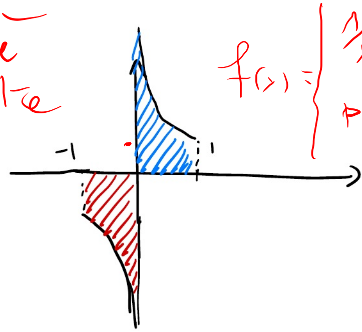
poichè $c > 1$ $\nexists \int_1^{+\infty} \sin t\,dt$

$$\cancel{= \lim_{M\to+\infty} \left[-\frac{1}{3M^3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}}$$

Quindi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty + \frac{1}{3} = +\infty$ (diverge a $+\infty$).

Esempio: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx$?

$\frac{1}{x}$ non è definita in $(-1;1)$



$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ ? & x = 0 \end{cases}$$

in questo caso spezziamo in $c=0$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \underline{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx} + \underline{\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx} \qquad \exists ?$$

? $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to 0^-} \underline{\int_{-1}^{M} \frac{1}{x}\,dx} = \lim_{M\to 0^-} [\log(-x)]_{-1}^{M} = \lim_{M\to 0^-} \log(-M)$
$= \cancel{-\infty}$

? $\int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to 0^+} \int_{N}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to 0^+} [\log(x)]_{N}^{1} = \lim_{N\to 0^+} -\log(N)$
$= \cancel{+\infty}$

Quindi $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = +\infty - \infty$, e dunque non esiste.

Attenzione: a non fare $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = [\log|x|]_{-1}^{1} =$
$= \log(1) - \log(1) = 0$ NO!

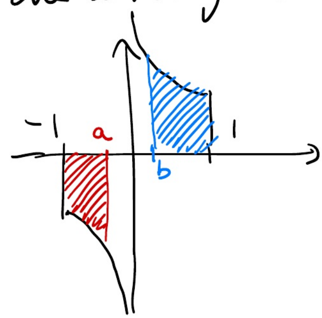
SBAGLIATO, il teo di Torricelli

non si applica perché f non è integrabile su $[-1,1]$.

Bisogna trattarlo come integrale improprio.

<u>Oss</u>: Potreste pensare che ha senso dire $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = 0$, visto che $\frac{1}{x}$ è dispari, e le aree // e // si sovrappongono perfettamente.

Si preferisce dire comunque che l'integrale non esiste:



Potremmo sommare

$$\int_{-1}^{a} \frac{1}{x} dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x} dx$$

e far tendere $a \to 0^-$, $b \to 0^+$

Il problema è che il risultato del limite dipende da come viene fatto questo limite...

<u>Esempio</u>: $\lim_{b \to 0^+} \left(\int_{-1}^{-b} \frac{1}{x} dx + \int_{b}^{1} \frac{1}{x} dx \right) =$

$$= \lim_{b \to 0^+} \left(\log(b) - \log(b) \right) = 0$$

Ma per esempio

$$\lim_{b\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-2b}\frac{1}{x}\,dx+\int_{b}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right)$$

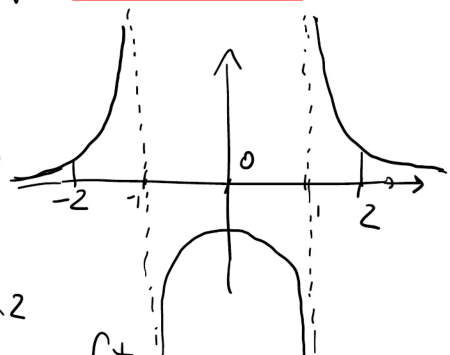
$$=\lim_{b\to 0^+}\Big(\log(2b)-\log(b)\Big)=$$

$$=\lim_{b\to 0^+}\log\left(\frac{2b}{b}\right)=\log(2)$$

e il risultato e' diverso.

Se ci sono "più problemi" sull'intervallo di integrazione, si spezza in tanti intervalli quanto basta per ricondursi a integrali impropri in cui c'e' solo un problema.

Esempio: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4-1}\,dx$ Grafico



$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\underbrace{\int_{-\infty}^{-2}+\int_{-2}^{-1}}_{\int_{-\infty}^{-1}}+\underbrace{\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}}_{\int_{-1}^{1}}+\underbrace{\int_{1}^{2}+\int_{2}^{+\infty}}_{\int_{1}^{+\infty}}$$

e la somma ha senso se $\underbrace{\text{hanno senso}}_{\text{cioe' i limiti esistono}}$, e non e' indeterminata.

Definizione

$$f:(a;b)\longrightarrow \mathbb{R}$$

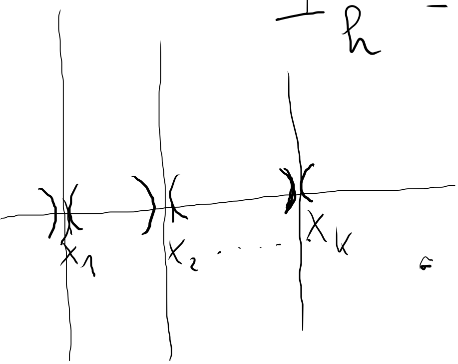
$$a,b\in\overline{\mathbb{R}}$$

- f con un numero finito di asintoti verticali

$$x=x_1,\quad x=x_2,\quad \dots,\quad x=x_k$$

$$x_1<x_2<\dots<x_k$$

$$I_h=\begin{cases}(-\infty;x_1) & h=1\\ (x_{h-1};x_h) & 1<h<k\\ (x_k;+\infty) & h=k\end{cases}$$



- Se $\exists \int_{I_k} f(t)\,dt$ impropri

e ha senso la somma

$$\int_{I_1} f+\int_{I_2} f+\dots+\int_{I_K} f=\int_a^b f$$

f si dice int. impr. su $(a;b)$

Oss: in questi casi si scrive comunque

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \quad \text{e non} \quad \int_{[-1,0)\cup(0,1]} \frac{1}{x}\,dx .$$

Prop: $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a,M]$ $\forall\, a<M<b$

(a,b) $\quad [N,M] \quad a<N<b$

e supponiamo che f abbia segno costante.

Allora esiste (finito o infinito) $\int_a^b f(x)\,dx$.

(e enunciato analogo per $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ ....)

Dim: supponiamo ad es. che $f \geq 0$ su $[a,b)$

Mostriamo che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è debolmente crescente.

Seguirà che $\exists \lim_{x\to b^-} F(x)$ che è proprio $\int_a^b f(t)\,dt$.

Infatti se $x_1 < x_2$, allora

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \int_a^{x_1} f(t)\,dt = F(x_1)$$

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0$ perchè $f(t) \geq 0$ e $x_2 > x_1$

$\blacksquare$

Integrali impropri notevoli

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Se $\alpha = 1$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| \rightsquigarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\log(x)\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} (\log(M)) = +\infty$

diverge.

$$\int_c^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \\ \text{FINITO } \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

$c > 0$

- Se $\alpha \neq 1$

$$\int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} + c$$

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_1^M =$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} \cdot M^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

$f \geq 0$ integ su I $\Downarrow$ $\int_I f \geq 0$

- Se $1-\alpha > 0$, cioe' $\boxed{\alpha < 1}$, il limite e' $\boxed{+\infty.}$
- Se $1-\alpha < 0$, cioe' $\boxed{\alpha > 1}$, il limite $\boxed{\text{e' finito}}$ e vale $-\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} > 0.$

Riassumendo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$; converge se $\alpha > 1$.

<u>Esempio</u>: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, e $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge a $+\infty$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$c>0$ $$\int_0^c x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < +\infty & \alpha<1 \\ +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

- $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to 0^+} \left[\log(x)\right]_M^1 = \lim_{M\to 0^+} \left(\log(1) - \log(M)\right) = +\infty$ diverge

- $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to 0^+}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_M^1 =$

$$= \lim_{M\to 0^+}\left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\cdot M^{1-\alpha}\right]$$

  - se $1-\alpha > 0$, cioè $\boxed{\alpha < 1}$, il limite $\boxed{\text{è finito}}$ e vale $\frac{1}{1-\alpha} > 0$

  - se $1-\alpha < 0$, cioè $\boxed{\alpha > 1}$, il limite è $\boxed{+\infty}$

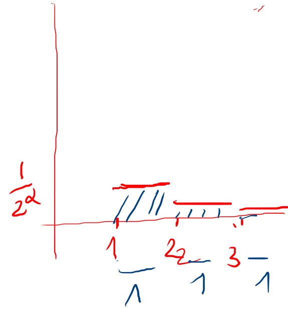
Riassumendo, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx =$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$; converge se $\alpha < 1$.

<u>Oss</u>: quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Osservazione per $\alpha>0$

Come già osservato quindi

$f(x)=\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ se $n\le x<n+1$



$$\exists \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^\alpha}=\int_1^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{([x]+1)^\alpha}}_{\geq 0}\,dx$$

e poiché

$$\frac{1}{(x+1)^\alpha}\le\frac{1}{([x]+1)^\alpha}\le\frac{1}{x^\alpha}\quad \text{per } x\geq 1$$

$$\int_1^N\frac{1}{(x+1)^\alpha}dx\le\int_1^N\frac{1}{([x]+1)^\alpha}dx\le\int_1^N\frac{1}{x^\alpha}dx$$

$\alpha\le 1$: $\quad \xrightarrow{N\to\infty} +\infty \;=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^\alpha}$

$\alpha>1$: $\quad \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^\alpha} \le L<+\infty$, $\quad L=\frac{1}{\alpha-1}$

Questo procedimento vale in generale

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} +\infty & \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

CRITERI PER STUDIARE LA CONVERGENZA DI INTEGRALI IMPROPRI.

Criterio del confronto:

Riemann

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili in ogni $[a, M]$ $\forall\, a < M < b$.

Se $\exists\, U$ intorno sx di b t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U \cap [a,b)$

1) se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge (finito), allora anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge (finito).

2) se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $(a +\infty)$ (infinito), allora anche $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge $(a +\infty)$ (infinito).

(enunciato analogo se $f, g : (a, b]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ...)

$f \leq g \leq 0$ 1) infinito
11) finito

Esempio: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4+3x^3+x+1}$. $f(x) = \dfrac{1}{x^4+3x^3+x+1}$ è continua in $[1, +\infty)$ perché $x^4+3x^3+x+1 > 0$ $\forall x \geq 1$.

$$\frac{1}{x^4 + o(x^4)} \qquad x \to +\infty$$

Inoltre $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^4}$ $\forall x \in [1, +\infty)$

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ converge, per confronto

concludiamo che $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Criterio del confronto asintotico (C. A.)

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$

integrabili su $[a, M]$ $\forall a < M < b$.

Se $\exists U$ intorno sx di b t.c.

$\boxed{f(x) \geq 0}$, $\boxed{g(x) \geq 0}$ $\forall x \in U \cap [a, b)$ e $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Allora:

- se $\ell \neq 0, +\infty$, $\int_a^b f(x) dx$ converge $\iff$ $\int_a^b g(x) dx$ converge.

  $f(x) = \ell g(x) + o(g(x))$ $x \to b^-$

- se $\ell = 0$ e $\int_a^b g(x) dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x) dx$ converge

  $f = o(g)$ diverge $\Leftarrow$ diverge

- se $\ell = +\infty$ e $\int_a^b f(x) dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b g(x) dx$ converge

  $g = o(f)$ diverge $\Leftarrow$ diverge

(ad esempio: $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow$ per x vicino a b vale $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ vicino a b.)

(enunciato analogo per $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ ...)
$a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Oss : le implicazioni di questi criteri non si invertono.

Esempio : $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x}$ per $x \geq 1$, e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.
$f(x) \leq g(x)$

Non si può concludere che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ diverge
(è falso!)

Il crit. del confronto dice
$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} g(x)\, dx \text{ diverge.}$$

non viceversa! Diventa decisivo l'uso degli sviluppi

Esempio : $\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x} dx$ $f(x) = \frac{1}{x - \sin x}$ è continua in $(0, 1]$, e $f(x) > 0$ in $(0, 1]$.

$x > 0$
$|x| > |\sin x|$
$x > |\sin x| = \sin x \quad 0 < x < \pi$

(infatti $x - \sin x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$
ed è $= 0 \Leftrightarrow x = 0$)

Metodo : usare Taylor per confrontare la $f(x)$ con una certa $\frac{1}{x^\alpha}$

Sviluppiamo il denominatore in 0 (il punto "problematico")

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$f(x) = \frac{1}{x - \sin x} \sim \frac{1}{\frac{x^3}{6}} \quad \text{attorno a } 0.$$

Uso C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^3}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

Per C.A. concludo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx$, che sappiamo divergere.

Quindi $\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x}\,dx$ diverge.

Oss: i criteri del confronto e C.A. si possono usare anche per funzioni negative, cambiando opportunamente le conclusioni.

Ad esempio: se $g(x) \le f(x) \le 0$ per $x \in [a,b)$

Allora: • se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora

$\frac{a-b}{b} \to 0$

$\frac{a}{b} \to 1$

$\frac{a}{b} - 1 \to 0$

anche $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

- se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge ($a -\infty$ per forza)

allora $\int_a^b g(x)$ diverge ($a -\infty$).

hanno stessa p.p.

$x \to +\infty$

$x^{2/\pi}$

Esempio: differenza di infiniti con stessa parte principale

$$f(x) = \underline{(x^2+x-1)^{\frac{1}{\pi}}} - \underline{(x^4+x)^{\frac{1}{2\pi}}} \quad x \geq 0$$

f è continua $\exists \int_0^M f(x)\,dx \quad \forall M \in \mathbb{R}$.

$\int_0^{+\infty} f$ $\exists$? è finito?

$$f(x) = x^{\frac{2}{\pi}} \left[\left(1 + \frac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\pi}} - \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2\pi}} \right]$$

PP

$x \to \infty \to 0$ $\quad$ $x \to \infty \to 0$

$$= x^{\frac{2}{\pi}} \left(\cancel{1} + \frac{1}{\pi}\underline{\frac{x-1}{x^2}} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{1} - \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)$$

$$= x^{2/\pi} \left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{x} + \underline{o\left(\frac{1}{x}\right)} \right) = \frac{1}{\pi} x^{\frac{2}{\pi}-1} + o\left(x^{\frac{2}{\pi}-1}\right)$$

$g(x) = \frac{1}{\pi} x^{\frac{2}{\pi}-1}$, $\quad \frac{f}{g} \xrightarrow[x\to+]{} 1$

Quindi:

1) da un certo punto in poi $f \geq 0$ essendolo $g(x) = \frac{1}{\pi} x^{\frac{2}{\pi}-1}$

per cui $\exists \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

2) $\frac{2}{\pi} - 1 < 0$, $g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^{1-\frac{2}{\pi}}}$

quindi $\displaystyle\int^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$

1

per confronto asintotico

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

Proposizione

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f \geq 0$ $\qquad$ $f(x) > 0 \quad x \neq x_0$

inti imp $\qquad$ $\underline{f(x_0) = 0}$

f è derivabile in x_0

$$\int_a^b \frac{1}{f(x)} \, dx = +\infty$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$U(x_0)$

$|f(x)| \leq |x - x_0|$ $\qquad$ $f(x) = o(x - x_0)$

$$\frac{1}{|f(x)|} \geq \frac{1}{|x - x_0|}$$

me $\displaystyle\int_{x_0}^{z} \frac{1}{|x-x_0|} = +\infty$

$$\int_{z}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|} = +\infty$$

$x - x_0 = y$ $\displaystyle\int_{z-x_0}^{0} \frac{1}{|y|} = +\infty$

quindi $\displaystyle\int \frac{1}{|t|} = +\infty$

OSS.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f ~~int imp.~~ CONTINUA

$f(x_0) = 0$

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq x_0$

$f'(x_0) \neq 0$

f' continua

$\nexists \int_a^b \frac{1}{f}$

$\int_a^{x_0} \frac{1}{f} = -\infty$

$\int_{x_0}^b \frac{1}{f} = +\infty$

ESERCIZIO

STUDIARE

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e-e^x}\,dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e-e^x}\,dx$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{e-e^x}\,dx$$