Osservazione

se $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$,

è LIMITATA su $(a; b)$

ed è INTEGRABILE IMPROPRIAMENTE su $(a; b)$

allora

f è RIEMANN INTEGRABILE su $[a; b]$

CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA

(per funzioni a segno variabile)

Def: f integrabile su ogni intervallo chiuso $[a,b] \subseteq I$, si dice <u>assolutamente integrabile</u> su I se $|f|$ è integrabile (eventualmente in senso generalizzato) su I, ~~cioè~~ e $\int_I |f(x)|dx$ converge.

Def: $x \in \mathbb{R}$. Definiamo la

parte positiva di x è $x^+ = \max\{x, 0\}$ $\left(= \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \right)$

parte negativa di x è $x^- = -\min\{x, 0\}$ $\left(= \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \right)$

Es: $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $(-3)^+ = 0$, $(-3)^- = +3$.

Oss: $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$

$$\Rightarrow x^+ = \frac{|x| + x}{2}, \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}$$

Analogamente, se $f(x)$ è una funzione ho

$$f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-, \quad |f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$$

Prop: se f è assolutamente integrabile su I, con integrale finito allora f è integrabile (in senso generalizzato)

Osservazione

1) f Riemann integrabile su $[a;b]$

$$\Downarrow$$

$|f|$, f^+, f^- Riemann integr. su $[a;b]$

MENTRE

$|f|$ Riem. int. su $[a;b]$

$$\not\Downarrow$$

f, f^+, f^- Riem. int su $[a;b]$

2) f con integrale improprio convergente

$$\not\Downarrow$$

f assolutamente integrabile

MA

f ass. integrabile

$$\Downarrow$$

f ha integrale improprio finito

su I.

Attenzione: non vale il viceversa! (esempio più avanti)

Dim: $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$, quindi

$$0 \leq (f(x))^+ \leq |f(x)|$$

$$0 \leq (f(x))^- \leq |f(x)|$$

Per confronto, visto che sto supponendo che $\int_I |f|\,dx$ converga, concludo

che convergono anche $\int_I f(x)^+\,dx$ e $\int_I f(x)^-\,dx$.

Visto che $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, concludo

che $$\int_I f(x)\,dx = \int_I \left(f(x)^+ - f(x)^-\right)dx = \int_I f(x)^+\,dx - \int_I f(x)^-\,dx$$

(ad esempio se $I = [a,b)$, abbiamo

$$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^M \left(f(x)^+ - f(x)^-\right)dx = \int_a^M f(x)^+\,dx - \int_a^M f(x)^-\,dx$$

passando al limite per $M \to b^-$, so che i limiti di esistono, quindi esiste anche $\lim_{M \to b^-} \int_a^M f(x)\,dx$).

$\blacksquare$

Osservazione

si ha quindi che se f è assolutamente integrabile su I

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

Corollario: $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ $a\in\mathbb{R}$, $b\in\overline{\mathbb{R}}$.
integrabili in $[a,M]$ $\forall\, a<M<b$.

se $\exists U$ intorno sx di b t.c. $|f(x)|\le g(x)$ $\forall x\in U\cap[a,b)$

e se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(confronto + assoluta integrabilità).

Esempio: $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx$. $f(x)=\frac{\sin x}{x^2}$ a segno variabile su $[1,+\infty)$

$$|f(x)|=\frac{|\sin(x)|}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$$. Prendo $g(x)=\frac{1}{x^2}$ nel corollario di sopra.

Visto che $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge, concludo che

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\,dx$ converge.

Esempio: $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Procedendo allo stesso modo:

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x}\quad.\quad |f(x)|=\frac{|\sin(x)|}{x}\le\frac{1}{x}=g(x).$$

a segno variabile

Questa volta però $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ <u>diverge</u>.

Quindi <u>non posso concludere niente</u> su $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

In questo caso:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_1^{M} \frac{\sin x}{x}\,dx =$$

$$\left(\int_1^{M} \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right)$$

$F = -\cos x$

$g' = -\frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(-\frac{\cos M}{M} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right)$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left(\underbrace{-\frac{\cos M}{M}}_{\to 0} + \cos 1 \right) - \underbrace{\lim_{M\to+\infty} \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{= \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge, si vede esattamente come per $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

quindi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

<u>Oss</u>: stesso discorso per $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

<u>Esempio</u>: $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ <u>diverge</u>.

(questo da un esempio di $f(x)$ tale che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, ma $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge)

__Oss__ : $|\sin x| \geq (\sin^2 x)$ (perché $-1 \leq \sin x \leq 1$)

Quindi $\int_1^n \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_1^n \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_1^n \frac{(1-\cos 2x)}{2x}\,dx =$

$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$= \int_1^n \frac{1}{2x}\,dx - \int_1^n \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$

$t = 2x$
$dt = 2dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int_2^{2n} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$

mandando $n \to +\infty$, diverge

$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ converge

quindi $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$ diverge a $+\infty$.

__Integrali del tipo__ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\,dx$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Caso $\alpha > 1$: sia $\gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha > \gamma > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \cdot (\log x)^\beta}, \quad g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$$

$f(x), g(x) \geq 0$, e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\gamma}{x^\alpha \cdot (\log x)^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\gamma} \cdot (\log x)^\beta}$

$\alpha - \gamma > 0$

questo limite e' 0.

Quindi visto che $\gamma > 1$, quindi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ converge

e per C.A. concludiamo che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ converge. $\forall \beta \in \mathbb{R}$

- caso $\alpha < 1$: sia $\gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha < \gamma < 1$, $f(x), g(x)$ come sopra.

Questa volta $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\overbrace{\gamma-\alpha}^{>0}}}{(\log x)^\beta} = +\infty$

e visto che $\gamma < 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ diverge. Per C.A.

possiamo concludere che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ diverge. $\forall \beta \in \mathbb{R}$

- $\alpha = 1$: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (\log x)^\beta} dx$

$$\int_2^{n} \frac{1}{x (\log x)^\beta} dx = \int_{\log 2}^{\log n} \frac{1}{t^\beta} dt$$

$t = \log x$

$dt = \frac{1}{x} dx$

e $\lim_{n\to+\infty} \left(\quad \right) = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} dt =$ converge se $\beta > 1$; diverge a $+\infty$ se $\beta \leq 1$

Riassumendo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot (\log x)^\beta}\,dx = \begin{cases} \alpha > 1 & \text{converge } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha < 1 & \text{diverge a } +\infty \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 & \text{converge} \\ \alpha = 1,\ \beta \leq 1 & \text{diverge a } +\infty. \end{cases}$$

Analogamente studiamo

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,dx \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\int_\mu^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_{1/\mu}^{2} \frac{-dt}{t^2 \cdot t^{-\alpha} \cdot |-\log(t)|^\beta} =$$

$t = \frac{1}{x} \leadsto x = \frac{1}{t}$

$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

se $\mu \to 0^+$ allora $\frac{1}{\mu} \to +\infty$

$$= \int_2^{1/\mu} \frac{dt}{t^{2-\alpha} \cdot |\log(t)|^\beta}$$

$$\lim_{\mu \to 0^+} \left(\quad \right) = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha} \cdot |\log(t)|^\beta}$$ e questo l'abbiamo appena studiato:

Segue:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\log x|^\beta}\,dx = \begin{cases} 2-\alpha > 1 \ (\alpha < 1) & \text{converge } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ 2-\alpha < 1 \ (\alpha > 1) & \text{diverge a } +\infty \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ 2-\alpha = 1 \ (\alpha = 1),\ \beta > 1 & \text{converge} \\ 2-\alpha = 1 \ (\alpha = 1),\ \beta \leq 1 & \text{diverge a } +\infty. \end{cases}$$

Esempi riassuntivi:

- $$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha<1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Dato n t.c. $x_0 < n < x_0+1$,

$$\int_{n}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} \underset{\substack{t=x-x_0 \\ dt=dx}}{=} \int_{n-x_0}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

e $$\lim_{n\to x_0^+}\left(\int_{n}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} \right) = \lim_{n\to x_0^+} \int_{n-x_0}^{1} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

e sappiamo che questo converge se $\alpha<1$
e diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

- $$\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\,dx$$. $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-4}$ è definita e continua in $[0,2)$

$\rightsquigarrow$ è un integrale improprio.

$f(x)<0$ su tutto $[0,2)$ perché $x^3+1>0$ per $x>0$
e $x^2-4<0$ per $0\leq x<2$.

Segno costante $\rightsquigarrow$ si possono usare confronto e C.A.

$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3+1}{(x-2)(x+2)}$ il pezzo problematico

è $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

C.A. con $g(x) = \frac{1}{x-2}$. (notare $g(x) < 0$ in $[0,2)$)

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+1}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \cdot \cancel{(x-2)} = \frac{9}{4} \neq 0, +\infty$$

Per C.A. $\int_0^2 f(x)\,dx$ ha lo stesso comportam. di $\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$

che sappiamo divergere (negativamente) (sostituzione $t = 2-x$ per ricondursi a $\int \frac{dt}{t}$..)

Quindi $\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\,dx = -\infty$ (cioè diverge negativam.)

- $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita e continua su $\mathbb{R}$.

$(1+x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$

Inoltre $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi l'unico problema è "a $+\infty$."

Per x grandi $\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{\log(x^2)}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\log(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$

e sappiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, quindi probabilmente anche il nostro divergerà.

Facciamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\log(1+x^2)}^{\to+\infty}}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1}} = \frac{+\infty}{1}$$

$$= +\infty.$$

Quindi, visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, concludo che

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge (positivamente)

Segue che $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{=+\infty} = +\infty$$

cioè il nostro integrale diverge positivamente.

- $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})}\,dx.$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\operatorname{arctg}(x^{5/2})}$$

definita e continua su $(0,+\infty)$

e $f(x) > 0$ su $(0,+\infty)$.

⇝ 2 problemi, in 0 e a $+\infty$.

⇝ Spezziamo $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

e studiamo i due pezzi.

• $\int_0^1$: per $x \to 0^+$ si ha $\operatorname{arctg}(x^{5/2}) = x^{5/2} + o(x^{5/2})$

quindi $f(x) = \dfrac{x^2}{(2+3x^4)(x^{5/2} + o(x^{5/2}))}$

$$= \frac{x^2}{2x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}} + o(x^{\frac{1}{2}})}$$

Prendo $g(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Ho $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}} + o(x^{\frac{1}{2}})} = \dfrac{1}{2} \neq 0, +\infty$

Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, per C. A.

concludo che converge anche $\int_0^1 f(x)\,dx$.

• $\int_1^{+\infty}$: per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})} = \frac{x^2}{x^4\left(\frac{2}{x^4}+3\right)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})}$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{x^4}+3\right)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{3 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$$

Prendo $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2} \cdot \left(\frac{2}{x^4}+3\right)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})} = \frac{2}{3\pi} \neq 0, +\infty$$

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, per C.A.

converge anche $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$

converge.

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)} dx$. $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}$ definita e continua in $(0, +\infty)$

problemi in $x=0$ e a $+\infty$

$f(x)$ a segno variabile.

Spezziamo $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

- $\int_0^1$: oss. che $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$, perché

$(\sin x \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2})$

Quindi posso usare confronto e C.A.

per $x \to 0^+$ $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)} = \frac{x + o(x)}{x^{3/2} + o(x^{3/2})}$

$$= \frac{1 + o(1)}{x^{1/2} + o(x^{1/2})}$$

Prendo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{x^{1/2}+o(x^{1/2})} \cdot x^{1/2} = 1 \neq 0, +\infty$$

Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, per C.A. concludiamo

che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

- $\int_1^{+\infty}$: qui $f(x)$ oscilla tra valori positivi e negativi.

Proviamo a usare assoluta convergenza:

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x^{3/2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}(x^2+1)} \leq \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x^{7/2}}$$

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/2}}\,dx$ converge, per

confronto ho che $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge,

e per assoluta integrabilità segue che

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

converge.