Osservazione

se $f:[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$,

è LIMITATA su $(a;b)$

ed è INTEGRABILE IMPROPRIAMENTE su $(a;b)$

allora

f è RIEMANN INTEGRABILE su $[a;b]$

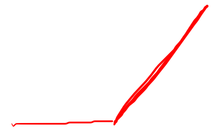
CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA

(per funzioni a segno variabile)

Def: f integrabile su ogni intervallo chiuso $[a,b] \subseteq I$, si dice <u>assolutamente integrabile</u> su I se $|f|$ è integrabile (eventualmente in senso generalizzato) su I, ~~cioè~~ e $\int_I |f(x)|dx$ <u>converge</u> $\in [0;+\infty)$

Def: $x \in \mathbb{R}$. Definiamo la

parte positiva di x è $x^+ = \max\{x,0\}$ $\left(= \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \right)$



parte negativa di x è $x^- = -\min\{x,0\}$ $\left(= \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \right)$

Es: $4^+ = 4$, $4^- = 0$, $(-3)^+ = 0$, $(-3)^- = +3$.

Oss: $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$

$$\Longrightarrow x^+ = \frac{|x|+x}{2}, \quad x^- = \frac{|x|-x}{2}$$

Analogamente, se $f(x)$ è una funzione ho

$$f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-, \quad |f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$$

Prop: se f è assolutamente integrabile su I, con integrale finito

allora f <u>è integrabile</u> (in senso generalizzato)

Osservazione

1) f Riemann integrabile su $[a;b]$

$\ast$ $\Downarrow$ proprietà int. di Riem.

$|f|, f^+, f^-$ Riemann integr. su $[a;b]$

MENTRE

$|f|$ Riem. int. su $[a;b]$

$\ast$ $\not\Downarrow$ $f(x) = \begin{cases} 1 & [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ -1 & [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

f, f^+, f^- Riem. int su $[a;b]$

2) f con integrale improprio convergente

$\ast$ $\not\Downarrow$ $\frac{\sin x}{x}$ su $(0;+\infty)$ $[1;+\infty)$

f assolutamente integrabile

MA

f ass. integrabile

$\ast$ $\Downarrow$ Proposizione enunciata

f ha integrale improprio finito

su I.

<u>Attenzione</u>: non vale il viceversa! (esempio più avanti)

<u>Dim</u>: $|f(x)| = (f(x))^+ + (f(x))^-$, quindi

$$0 \le (f(x))^+ \le |f(x)|$$

$$0 \le (f(x))^- \le |f(x)|$$

Per confronto, visto che sto supponendo che $\int_I |f|\,dx$ converga, concludo

che convergono anche $\int_I f(x)^+ dx$ e $\int_I f(x)^- dx$.

Visto che $f(x) = (f(x))^+ - (f(x))^-$, concludo

che $\int_I f(x)\,dx = \int_I (f(x)^+ - f(x)^-)\,dx = \int_I f(x)^+ dx - \int_I f(x)^- dx$

$\exists \lim J_1$, $\exists \lim J_2$ finiti $\Rightarrow \exists \lim (J_2 - J_1) = \lim J_2 - \lim J_1$

(ad esempio se $I = [a,b)$, abbiamo

$$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^M (f(x)^+ - f(x)^-)\,dx = \int_a^M f(x)^+ dx - \int_a^M f(x)^- dx$$

passando al limite per $M \to b^-$, so che i limiti di esistono, quindi esiste anche $\lim_{M\to b^-} \int_a^M f(x)\,dx$).

$\blacksquare$

Osservazione

si ha quindi che se f è assolutamente integrabile su I

$$\boxed{\left| \int_I f \right| \le \int_I |f|}$$

Corollario: $f, g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

integrabili in $[a,r]$ $\forall\, a < r < b$.

se $\exists U$ intorno sx di b t.c. $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in U \cap [a,b)$

e se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

(confronto + assoluta integrabilità).

Esempio: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$. $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ a segno variabile su $[1,+\infty)$

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

. Prendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nel corollario di sopra.

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, concludo che

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ converge.

Esempio: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. Procedendo allo stesso modo:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ a segno variabile. $|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x} \leq \frac{1}{x} = g(x)$.

Questa volta però $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge.

Quindi non posso concludere niente su $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

In questo caso:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} dx =$$

$$\left(\int_1^M \underbrace{\sin x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

$F = -\cos x$

$g' = -\frac{1}{x^2}$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left(-\frac{\cos M}{M} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \underbrace{\left(-\frac{\cos M}{M} + \cos 1 \right)}_{0} - \underbrace{\lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx}_{= \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge, si vede esattamente come per $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos M}{M} + \cos 1 - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$-\frac{\cos M}{M} \to 0$

ass. int

quindi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Oss: stesso discorso per $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$.

NOTA

$\exists \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < +\infty$

Esempio: $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge.

(questo da un esempio di $f(x)$ tale che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, ma $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge)

Oss: $|\sin x| \overset{1}{\geq} (\sin^2 x)$ (perché $-1 \leq \sin x \leq 1$)

Quindi $\int_1^n \frac{|\sin x|}{x}dx \geq \int_1^n \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_1^n \frac{(1-\cos 2x)}{2x}dx =$

$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$= \int_1^n \frac{1}{2x}dx - \int_1^n \frac{\cos(2x)}{2x}dx$

$t = 2x$
$dt = 2dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\cancel{1}}{\cancel{x}}dx - \frac{1}{2}\int_2^{2n} \frac{\cos(t)}{t}dt$

mandando $n \to +\infty$, diverge

$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t}dt$ converge

quindi $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}dx$ diverge a $+\infty$.

$\cos 2t =$
$= (\cos t)^2 - (\sin t)^2$
$= 1 - 2(\sin t)^2$

$\cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$

$\frac{t+\frac{\pi}{2}}{t} \cdot \frac{\sin(t+\frac{\pi}{2})}{t+\frac{\pi}{2}}$

Un'altra dimostrazione

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x}dx = +\infty$$

$$+\infty \leftarrow \int_2^M \frac{1}{x}dx = \int_2^M \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{x}dx$$

$$= \int_2^M \frac{(\cos x)^2}{x}dx + \int_2^M \frac{(\sin x)^2}{x}$$

$$= \int_2^M \frac{[\sin(x-\frac{\pi}{2})]^2}{x} + \int_2^M \frac{(\sin x)^2}{x}$$

$$\leq \int_2^M \frac{[\sin(x-\frac{\pi}{2})]^2}{x-\frac{\pi}{2}} + \int_2^M \frac{(\sin x)^2}{x}$$

$$= \int_{2-\frac{\pi}{2}}^{M-\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^2}{x} + \int_2^M \frac{(\sin x)^2}{x}$$

$$\leq 2\int_{2-\pi/2}^{M} \frac{(\sin x)^2}{x}$$

Integrali del tipo $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}dx$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Caso $\alpha > 1$: sia $\gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha > \gamma > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \cdot (\log x)^\beta}, \quad g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$$

$f(x), g(x) \geq 0$, e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\gamma}{x^\alpha \cdot (\log x)^\beta} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\underbrace{\alpha-\gamma}_{\alpha-\gamma>0}} \cdot (\log x)^\beta}$

$g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$

questo limite e' 0.

Quindi visto che $\gamma > 1$, quindi $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ converge

e per C.A. concludiamo che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ converge. $\forall \beta \in \mathbb{R}$

- caso $\alpha < 1$: sia $\gamma \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha < \gamma < 1$, $f(x), g(x)$ come sopra. $g(x) = \frac{1}{x^\gamma}$

Questa volta $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\underbrace{\gamma-\alpha}_{>0}}}{(\log x)^\beta} = +\infty$

e visto che $\gamma < 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ diverge. Per C.A.

possiamo concludere che $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$ diverge. $\forall \beta \in \mathbb{R}$

- $\alpha = 1$: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (\log x)^\beta} dx$

$$\int_2^n \frac{1}{x (\log x)^\beta} dx = \int_{\log 2}^{\log n} \frac{1}{t^\beta} dt$$

$t = \log x$

$dt = \frac{1}{x} dx$

e $\lim_{n\to+\infty} \left(\quad \right) = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t^\beta} dt =$ converge se $\beta > 1$; diverge a $+\infty$ se $\beta \leq 1$

$$\exists \lim_{M\to\infty} \int_2^M \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx \quad - \quad \text{poiché } \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta} > 0$$

per $x \geq 2$

$$\frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha-1}(\log x)^\beta} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = \log x$$
$$e^y = x$$

$$\int_{\log 2}^{\log M} \frac{e^{(1-\alpha)y}}{y^\beta}\, dy$$

$$\alpha = 1 \qquad \int \frac{1}{y^\beta} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \beta \leq 1 \\ L \in \mathbb{R} & \beta > 1 \end{cases}$$

$$\alpha < 1 \qquad \frac{e^{\overset{0}{\wedge}(1-\alpha)y}}{y^\beta} \longrightarrow +\infty \quad \underset{\text{su semir.}}{\geq 1} \quad \int \longrightarrow +\infty$$

$$\alpha > 1 \qquad \frac{e^{\overset{0}{\vee}\frac{(1-\alpha)}{2}y}}{y^\beta} \cdot e^{\overset{0}{\vee}\frac{(1-\alpha)}{2}y} \underset{\text{su semir}}{\leq} e^{\overset{0}{\vee}\frac{(1-\alpha)}{2}y} \quad \int \to L \in \mathbb{R}$$

$$\searrow 0 \quad \underset{\text{su semi}}{\leq 1}$$

Riassumendo

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot (\log x)^\beta} dx = \begin{cases} \alpha > 1 & \text{converge } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha < 1 & \text{diverge a } +\infty \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = 1, \beta > 1 & \text{converge} \\ \alpha = 1, \beta \leq 1 & \text{diverge a } +\infty. \end{cases}$$

Analogamente studiamo

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} dx \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\int_\eta^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta} dx \underset{\uparrow}{=} \int_{1/\eta}^{2} \frac{-dt}{t^2 \cdot t^{-\alpha} \cdot |-\log(t)|^\beta} =$$

$t = \frac{1}{x} \rightsquigarrow x = \frac{1}{t}$

$dx = -\frac{1}{t^2} dt$

se $\eta \to 0^+$ allora $\frac{1}{\eta} \to +\infty$

$$= \int_2^{1/\eta} \frac{dt}{t^{2-\alpha} \cdot |\log(t)|^\beta}$$

$$\lim_{\eta \to 0^+} \left(\quad \right) = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-\alpha} \cdot |\log(t)|^\beta}$$ e questo l'abbiamo appena studiato:

Segue:
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\log x|^\beta} dx = \begin{cases} 2-\alpha > 1 \ (\alpha < 1) & \text{converge } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ 2-\alpha < 1 \ (\alpha > 1) & \text{diverge a } +\infty \ \forall \beta \in \mathbb{R} \\ 2-\alpha = 1 \ (\alpha = 1), \beta > 1 & \text{converge} \\ 2-\alpha = 1 \ (\alpha = 1), \beta \leq 1 & \text{diverge a } +\infty. \end{cases}$$

i) $$\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^{\alpha}\,|\log x|^{\beta}}\,dx$$

ii) $$\int_{1}^{2} \frac{1}{x^{\alpha}\,(\log x)^{\beta}}\,dx$$

per confronto basta studiare $\int \frac{1}{|\lg x|^{\beta}}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \qquad 2^{\alpha} \geq \frac{1}{x^{\alpha}} \geq 1$

$1 \leq x \leq 2 \qquad \frac{1}{2^{\alpha}} \leq \frac{1}{x^{\alpha}} \leq 1$

ii) $(\lg x)^{\beta}$ $\qquad x=1$ è nulla

$\beta \neq 1$

$$\beta \frac{(\lg x)^{\beta-1}}{x} \underset{x=1}{=} 0$$

$= o(x-1)^{\beta} \qquad (x>1)$

$\beta > 1 \qquad +\infty$

$1(x-1) + o(x-1)$

$\beta = 1 \qquad +\infty$

$$\beta > 1 \qquad (\lg x)^{\beta} = o\left((x-1)^{\beta}\right)$$

$$\frac{1}{(\lg x)^{\beta}} = \frac{1}{o(x-1)^{\beta}}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{o(x-1)^{\beta}}\,dx \qquad \frac{o(x-1)^{\beta}}{(x-1)^{\beta}} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

$$\frac{1}{(x-1)^{\beta}} << \frac{1}{o(x-1)^{\beta}} \qquad \frac{\frac{1}{(x-1)^{\beta}}}{\frac{1}{o(x-1)^{\beta}}} \to 0$$

$$\int_1 \frac{1}{(x-1)^{\beta}} = +\infty$$

$$\beta = 1 \qquad (\lg x) = (x-1) + o(x-1)$$

$$\int_1 \frac{1}{\lg x} = +\infty$$

$\underline{\beta < 1}$

$< +\infty$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(\lg x)^\beta}$$

$x - 1 = y$

$$\int_0^1 \frac{dy}{(\lg(1+y))^\beta}$$

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

$$\lg(1+y) = y \underbrace{\left(1 - \frac{y}{2} + o(y)\right)}_{1 + o(y)}$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^\beta} \frac{1}{(1 + o(1))}$$

CA

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+o(1)} \leq 2$$

Esempi riassuntivi:

- $$\int_{x_0}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} = \begin{cases} \text{converge se } \alpha<1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Dato η t.c. $x_0 < \eta < x_0 + 1$,

$$\int_{\eta}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} \underset{\substack{t = x - x_0 \\ dt = dx}}{=} \int_{\eta - x_0}^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$x \to x_0$ $\qquad$ $\eta - x_0 \to 0$

e $$\lim_{\eta \to x_0^+} \left(\int_{\eta}^{x_0+1} \frac{dx}{(x-x_0)^\alpha} \right) = \lim_{\eta \to x_0^+} \int_{\eta - x_0}^{1} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

e sappiamo che questo converge se $\alpha < 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$.

- $$\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4} \, dx \, . \qquad f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4} \text{ e' definita e continua in } [0,2)$$

$0 \geq \frac{1}{x^2-4} \geq f(x) \geq \frac{10}{x^2-4}$ $\rightsquigarrow$ e' un integrale improprio. $\qquad \frac{1}{x^2-4}$

$f(x) < 0$ su tutto $[0,2)$ perche' $x^3+1>0$ per $x>0$ e $x^2-4<0$ per $0 \leq x < 2$.

segno costante $\rightsquigarrow$ si possono usare confronto e C.A.

$$\frac{c_2}{x-2} \leq \frac{1}{x^2-4} \leq \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{x+2} \leq \frac{c_1}{x-2} < 0$$

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4} = \frac{x^3+1}{(x-2)(x+2)}$$ il pezzo problematico è $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

C.A. con $g(x) = \frac{1}{x-2}$. (notare $g(x) < 0$ in $[0,2)$)

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+1}{\cancel{(x-2)}(x+2)} \cdot \cancel{(x-2)} = \frac{9}{4} \neq 0, +\infty$$

Per C.A. $\int_0^2 f(x)\,dx$ ha lo stesso comportam. di $\int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx$

che sappiamo divergere (negativamente) (sostituzione $t = 2-x$ per ricondursi a $\int \frac{dt}{t}$..)

Quindi $\int_0^2 \frac{x^3+1}{x^2-4}\,dx = -\infty$ (cioè diverge negativam.)

- $$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$ è definita e continua su $\mathbb{R}$. ($1+x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{f(x)}{\frac{\log x}{x}} \xrightarrow{x\to\infty} 2$$

Inoltre $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi l'unico problema è "a $+\infty$".

Per x grandi $\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \sim \frac{\log(x^2)}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\log(x)}{x} \geq \frac{1}{x}$

e sappiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, quindi probabilmente anche il nostro divergerà.

Facciamo C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\log(1+x^2)}^{\to +\infty}}{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+1}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

Quindi, visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, concludo che

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge (positivamente)

Segue che $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f(x)\,dx}_{=+\infty} = +\infty$$

cioè il nostro integrale diverge positivamente.

- $$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})}\,dx.$$

x^{-2}

$x \to +\infty$

$x^{2-\frac{5}{2}}$

$x \to 0^+$

$$f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot\operatorname{arctg}(x^{5/2})}$$

definita e continua su $(0,+\infty)$

e $f(x) > 0$ su $(0,+\infty)$.

⇝ 2 problemi, in 0 e a $+\infty$.

⇝ Spezziamo $$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

e studiamo i due pezzi.

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

- $\int_0^1$: per $x \to 0^+$ si ha $\operatorname{arctg}(x^{5/2}) = x^{5/2} + o(x^{5/2})$

quindi $f(x) = \dfrac{x^2}{(2+3x^4)(x^{5/2} + o(x^{5/2}))}$

$$= \frac{x^2}{2x^{5/2} + o(x^{5/2})} = \frac{1}{2x^{1/2} + o(x^{1/2})}$$

Prendo $g(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Ho $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2} + o(x^{1/2})} = \frac{1}{2} \neq 0, +\infty$

Visto che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, per C. A.

concludo che converge anche $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

- $\int_1^{+\infty}$: per $x \to +\infty$,

$$f(x) = \frac{x^2}{(2+3x^4)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})} = \frac{x^2}{x^4\left(\frac{2}{x^4}+3\right)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})}$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{x^4}+3\right)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\pi}$$

Prendo $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\cdot\left(\frac{2}{x^4}+3\right)\cdot \operatorname{arctg}(x^{5/2})} = \frac{2}{3\pi} \neq 0, +\infty$$

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, per C.A.

converge anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}\,dx$.

$\frac{\sin x}{x^{3/2}} \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x \to 0^+$

$x \to +\infty$ $\frac{1}{x^{7/2}}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)}$ definita e continua in $(0, +\infty)$

problemi in $x = 0$ e a $+\infty$

$f(x)$ a segno variabile.

Spezziamo $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. PRIMA COSA

- $\int_0^1$: oss. che $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1$, perché

($\sin x \geq 0$ per $0 \leq x \leq 1 < \frac{\pi}{2}$)

Quindi posso usare confronto e C.A.

per $x \to 0^+$ $f(x) = \frac{\sin x}{x^{3/2}(x^2+1)} = \frac{x + o(x)}{x^{3/2} + o(x^{3/2})}$

$$= \frac{1 + o(1)}{x^{1/2} + o(x^{1/2})} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Prendo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+o(1)}{x^{\frac{1}{2}}+o(x^{\frac{1}{2}})} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 1 \neq 0, +\infty$$

f e $\frac{1}{\sqrt{x}}$ hanno stesso segno in $(0,1)$

Visto che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge, per C.A. concludiamo

che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

- $\int_1^{+\infty}$: qui $f(x)$ oscilla tra valori positivi e negativi.

Proviamo a usare assoluta convergenza:

$$|f(x)| = \frac{|\sin(x)|}{x^{3/2}(x^2+1)} \le \frac{1}{x^{3/2}(x^2+1)} \le \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x^{7/2}}$$

$\frac{7}{2} > 1$

Visto che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{7/2}}\,dx$ converge, per

confronto ho che $\int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge,

e per assoluta integrabilità segue che

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

In conclusione, anche $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx$

converge.

Complemento

Il fatto che

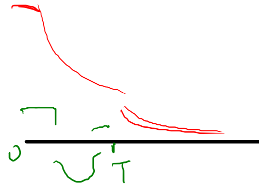
$$\exists \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \in \mathbb{R}$$

e similmente che

$$\exists \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx \quad \ldots$$

è un caso particolare della seguente proposizione:

Proposizione Siano f e g Riemann integr. su ogni $[a;b]$. Inoltre per qualche $T>0$



1) $f \searrow 0$ per $x \to +\infty$ (decrescente infinitesima)

2) $g(x) = g(x+T)$ (T-periodica)

3) $\int_0^T g(x)\,dx = 0$ (a media nulla sui periodi)

allora

$$\exists \int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

Lemma 1 α) f, g Riemann int. $\Rightarrow f\cdot g, |g|, g^+, g^-$ R. int.

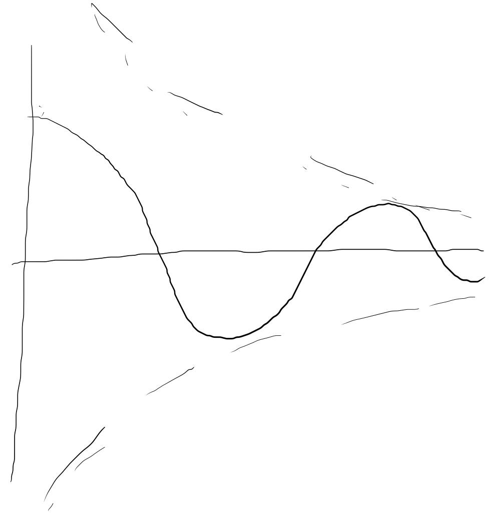
β) g T-periodica $\Longleftrightarrow |g|, g^+, g^-$ T-period.

γ) g T-per. e R. int $\Rightarrow$ g limitata e $\int_c^{c+T} g(x)\,dx = \int_0^T g(x)\,dx$

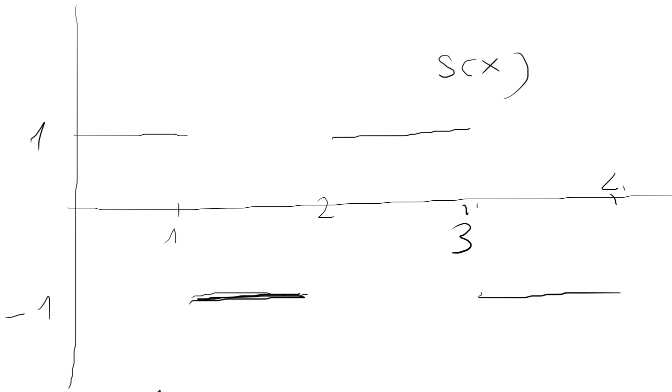
DIM γ) sia $K = \left\lfloor \frac{c}{T} \right\rfloor$ $\qquad KT \le C \qquad KT+T \le C+T$

$$\int_C^{C+T} g(x) = \int_C^{KT+T} g(x) + \int_{KT+T}^{C+T} g(x) = \int_C^{KT+T} g(x) + \int_{KT}^{C} g(x+T) = \int_C^{KT+T} g(x) + \int_{KT}^{C} g(y) = \int_{KT}^{KT+T} g(x) = \int_0^T g(z) \quad \blacksquare$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$



$$\int_1^{2M+1} \frac{s(x)}{x}\,dx$$



$$\|$$

$$-\int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots - \int_{2M-1}^{2M} \frac{dx}{x} + \int_{2M}^{2M+1} \frac{dx}{x}$$

$$\|$$

$$= -(\lg 2 - \cancel{\lg 1}) + \lg 3 - \lg 2 - (\lg 4 - \lg 3) + \dots$$

$$= -2\lg 2 + 2\lg 3 - 2\lg 4 + 2\lg 5 + \dots - 2\lg 2M + \lg(2M+1)$$

$$\int_1^{2M+1} \frac{s(x)}{x}\,dx =$$

$$= \quad -2\lg 2 + 2\lg 3 + \cdots -$$

$$\underbrace{-2\lg 2n + 2\lg(2n+1)} - 2\lg M + \lg(2M+1)$$

$$2\lg\left(\frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$2\lg\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$e^{-x^2}$$