

## Compito di MDAL

12 Gennaio 2017

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: ..... Corso e Aula: .....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

**Esercizio 1.** Dopo aver mostrato che  $\mathcal{B} = \langle x^2 - 1, x, x^2 + 1 \rangle$  è una base di  $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$  (polinomi di grado  $\leq 2$ ) si risponda alle seguenti domande:

1. si calcolino i coefficienti  $c_1, c_2, c_3$  del polinomio  $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$  nella base  $\mathcal{B}$  (ovvero si scriva  $P(x)$  nella forma  $c_1(x^2 - 1) + c_2x + c_3(x^2 + 1)$ );
2. si consideri l'applicazione lineare  $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$  definita ponendo  $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$  e si scriva la matrice associata a  $D$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$  in partenza e in arrivo;
3. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di  $D$ ;
4. Stabilire se  $D$  è diagonalizzabile.



**Esercizio 2.** Sia  $V$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  definito dall'equazione  $3x + 5y = 0$  e sia  $W$  il sottospazio definito dall'equazione  $z = 0$ .

1. Si calcoli la dimensione di  $V \cap W$ ;
2. Si trovi una base ortogonale di  $V$ ;
3. Si trovi un'applicazione lineare invertibile  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che manda  $W$  in  $V$ .



**Esercizio 3.** a) Risolvere la congruenza

$$84x \equiv 1540 \pmod{455}$$

b) Per quali valori del numero intero positivo  $m$  la congruenza

$$84x \equiv 770 \pmod{175m}$$

ammette soluzione ?



- Esercizio 4.** a) Quante sono le soluzioni in  $\mathbb{Z}$  dell'equazione  $x + y + z = 33$  con  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ?
- b) Quante sono le soluzioni in  $\mathbb{Z}$  dell'equazione  $x + y + z = 33$  soggette ai vincoli  $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$ ?

