Compito di MDAL

12 Gennaio 2017

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte.

Esercizio 1. Dopo aver mostrato che $\mathcal{B} = \langle x^2 - 1, x, x^2 + 1\rangle$ è una base di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ (polinomi di grado ≤ 2) si risponda alle seguenti domande:

1. si calcolino i coefficienti c_1, c_2, c_3 del polinomio $P(x) = 3x^2+2x+1$ nella base $\mathcal{B}$ (ovvero si scriva $P(x)$ nella forma $c_1(x^2-1)+c_2x+c_3(x^2+1)$);
2. si consideri l'applicazione lineare $D : \mathbb{R}[x]^{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ definita ponendo $D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$ e si scriva la matrice associata a D rispetto alla base $\mathcal{B}$ in partenza e in arrivo;
3. Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di D;
4. Stabilire se D è diagonalizzabile.

La base canonica di $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ è data dai polinomi x^2,x ed 1. Per mostrare che $\mathcal{B}$ è una base basta osservare che $1 = \frac{1}{2}(x^2+1) - \frac{1}{2}(x^2-1)$ e che $x^2 = (x^2-1)+(x^2+1)$. Facendo queste sostituzioni, un polinomio ax^2+bx+c scritto nella base canonica, può essere riscritto nella base $\mathcal{B}$ ottenendo l'uguaglianza

$$ax^2 + bx + c = -\frac{1}{2}b(x^2-1) + (2a+2c)x + \frac{1}{2}b(x^2+1).$$

In altre parole il polinomio con componenti (a, b, c) nella base canonica, ha componenti $(-\frac{1}{2}b, 2a+2c, \frac{1}{2}b)$ nella base $\mathcal{B}$.

(1) In particolare il nostro polinomio $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ nella nuova base ha componenti $(-\frac{1}{2}\cdot 2, 2\cdot 3 + 2\cdot 1, \frac{1}{2}\cdot 2)$ e svolgendo le moltiplicazioni otteniamo $c_1 = -1, c_2 = 8, c_3 = 1$.

(2) Per trovare la matrice M di D rispetto alla base $\mathcal{B}$, applichiamo D ai vettori $x^2-1,\ x,\ x^2+1$ della base $\mathcal{B}$. Svolgendo i calcoli si vede che

$D(x^2-1) = 2x,\ Dx = 1 = -\frac{1}{2}(x^2-1)+\frac{1}{2}(x^2+1),\ D(x^2+1) = 2x$. Questo significa che, rispetto alla base $\mathcal{B}$, la funzione D manda i polinomi con componenti $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ (ovvero i tre polinomi x^2-1, x, x^2+1) rispettivamente nei polinomi con componenti $(0,2,0),(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(0,2,0)$. Questi tre vettori, scritti in colonna, saranno quindi le colonne di M, ovvero

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine o per stabilire se D è diagonalizzabile, è indifferente lavorare nella base canonica o nella base $\mathcal{B}$.

(3) I polinomi $P(x)$ con $D(P(x)) = 0$ sono esattamente i polinomi costanti $P(x) = c$ ovvero quelli nello span di 1. La dimensione del nucleo di D è dunque 1, e visto che lo spazio totale $\mathbb{R}[x]^{\leq 2}$ ha dimensione 3, l'immagine di D deve avere dimensione 2, come si può vedere anche direttamente osservando che i polinomi dell'immagine sono quelli di grado 1, ovvero i polinomi nello span di $\{x, 1\}$.

(4) La matrice di D nella base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è $p(x) = \det(A - xI) = -x^3$. L'unico autovalore è 0, con molteplicità algebrica 3. La molteplicità geometrica è la dimensione del nucleo di $D - 0I$, ovvero di D stessa, che è 1. Siccome le molteplicità algebrica e geometrica non coincidono, D non è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $3x + 5y = 0$ e sia W il sottospazio definito dall'equazione $z = 0$.

1. Si calcoli la dimensione di $V \cap W$;
2. Si trovi una base ortogonale di V;
3. Si trovi un'applicazione lineare invertibile $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che manda W in V.

1. La dimensione di $V \cap W$ è 1.

2. Una base ortogonale di V è data da $v_1 = (0, 0, 1)$ e $v_2 = (5, -3, 0)$. Possiamo completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo il vettore $v_3 = (1, 0, 0)$.

Una base di W è data dai due vettori $w_1 = (1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$. Possiamo completarla ad una base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo il vettore $w_3 = (0, 0, 1)$.

3. Per trovare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che porta W in V basta definire L in modo che i vettori w_1, w_2, w_3 vengano mandati nei vettori v_1, v_2, v_3 rispettivamente. In tal modo la base di W va nella base di V (cosicché L manda W in V), e la base di $\mathbb{R}^3$ va in un'altra base di $\mathbb{R}^3$ (cosicché L è invertibile).

La matrice M di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (che è data da w_1, w_2, w_3) ha come colonne v_1, v_2, v_3 messi "in verticale", ovvero

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. a) Risolvere la congruenza

$$84x \equiv 1540 \quad (455)$$

b) Per quali valori del numero intero positivo m la congruenza

$$84x \equiv 770 \quad (175m)$$

ammette soluzione ?

La soluzione al primo punto è 40 modulo 65.

La seconda congruenza ha soluzione se e solo se m non è divisibile per 3 o per 4.

Esercizio 4. a) Quante sono le soluzioni in $\mathbb{Z}$ dell'equazione $x + y + z = 33$ con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$?
b) Quante sono le soluzioni in $\mathbb{Z}$ dell'equazione $x + y + z = 33$ soggette ai vincoli $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$?

La risposta al punto (a) è $\binom{33+2}{2} = \binom{35}{2}$.

Per il punto (b) osserviamo che le soluzioni cercate sono tante quante le soluzioni di $x+y+z = 33-2-3-4 = 24$ con $x+y+z \geq 0$. La risposta è in questo caso $\binom{24+2}{2} = \binom{26}{2}$.