Esercizio 3. a) Risolvere la congruenza

$$84x \equiv 1540 \quad (455)$$

b) Per quali valori del numero intero positivo m la congruenza

$$84x \equiv 770 \quad (175m)$$

ammette soluzione ?

a) $84x \equiv 1540 \equiv 175 \quad (455)$

Divido tutto per 7

$12x \equiv 25 \quad (65)$

1° metodo: $65 = 5 \cdot 13$, $(5, 1$

$\begin{cases} 12x \equiv 25 \ (5) \\ 12x \equiv 25 \ (13) \end{cases}$ $\begin{cases} x \equiv 0 \ (5) \\ x \equiv 1 \ (13) \end{cases}$

$x = 1 + 13k \quad 1 + 13k \equiv 0 \ (5)$ ⇐

$3k \equiv -1 \ (5) \Rightarrow k \equiv 3 \ (5$

$x \equiv 1 + 13 \cdot 3 \quad (65)$

$x \equiv 40 \quad (65)$

2° metodo: Cerco l'inverso di 12 modulo 65

$65 = 5 \cdot 12 + 5$
$12 = 2 \cdot 5 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$

$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = -2 \cdot 12 + 5 \cdot 5 =$

$= -2 \cdot 12 + 5(65 - 5 \cdot 12) =$

$= -27 \cdot 12 + 5 \cdot 65$

$-27 \cdot 12 \equiv 1 \quad (65) \Rightarrow$ l'inverso di 12 mod 65 è -27

$(-27)\, 12x \equiv -27 \cdot 25 \quad (65)$

$\boxed{x \equiv 40 \quad (65)}$

b) la congruenza $84x \equiv 770 \ (175m)$ ha soluzione $\Leftrightarrow$
ha soluzione $12x \equiv 110 \quad (25m) \Leftrightarrow$
$(12, 25m) \mid 110$. ORA $(12, 25m) = (12, m)$ | $110 = 2 \cdot 5$
$\Leftrightarrow (12, m) \mid 2 \Leftrightarrow 3 \nmid m \wedge 4 \nmid m$

$\Leftrightarrow \quad m \equiv \pm 1, \pm 2, \pm 5 \quad (12)$

Esercizio 4. a) Quante sono le soluzioni in $\mathbb{Z}$ dell'equazione $x + y + z = 33$ con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$?
b) Quante sono le soluzioni in $\mathbb{Z}$ dell'equazione $x + y + z = 33$ soggette ai vincoli $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$?

a) Si tratta di contare le partizioni di $n = 33$ in 3 interi non negativi. Come visto a lezione possiamo pensare di avere $33 + 2 = 35$ palline bianche e colorarne 2 di nero

○ ○ ● ○ ○ - - - ○ ● ○ ○

~~A questo~~ Questo si può fare in $\binom{35}{2}$ modi

A ~~questa~~ ognuna di queste configurazioni corrisponde una terna x, y, z con $x \geq 0$ $y \geq 0$ $z \geq$ e $x + y + z = 33$, semplicemente prendendo

x = # palline bianche prima della prima nera

y = # palline bianche tra le 2 nere

z = # " " dopo la seconda nera

(ad esempio le ordino da sx a dx).

Le sol sono quindi $\binom{35}{2}$

b) Sia $x' = x - 2$ $y' = y - 3$ $z' = z - 4$

$\Rightarrow x', y', z' \geq 0$ e $x' + y' + z' = 33 - (2 + 3 + 4) = 24$

Ad ogni terna (x, y, z) come nell'enunciato corrisponde una unica terna (x', y', z') di interi non negativi tali che $x' + y' + z' = 24$.

Queste ultime sono $\binom{24+2}{2}$ che è quindi