CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2017/2018 – Correzione Prova in Itinere 04/04/2018

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Si ha $f(x) = (x-1)^2/2$ da cui
$$|\epsilon_{in}| \doteq \left|\frac{2x(x-1)}{(x-1)^2}\right| |\epsilon_x| \leq \frac{2|x|}{|x-1|}u.$$
Dal grafico di $g(x) = 2|x|/||x-1|$ segue che il calcolo è mal condizionato in un intorno di $x = 1$.

2. Si ha
$$\mathrm{Var}(x,y) = \frac{(x-y)^2}{2} = x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{2}.$$

3. Posto $z = (x+1)/2$, nel primo algoritmo il contributo dell'errore commesso nel calcolo di z si annulla e quindi si ottiene
$$|\epsilon_{alg_1}| \leq 4u,$$
e dunque l'algoritmo è stabile. Per il secondo algoritmo si ha
$$|\epsilon_{alg_2}| \leq \frac{3x^2 + 2 + (x+1)^2}{\mathrm{Var}(x,1)}u,$$
e dunque l'algoritmo è instabile in un intorno di $x = 1$.

Esercizio 2

1. Segue dal teorema di Gershgorin calcolando i cerchi per colonna.

2. Le sottomatrici principali di testa di ordine $1, \ldots, n-1$ sono triangolari superiori con elementi uguali ad 1 sulla diagonale principale.

3. Impostando le equazioni del teorema di esistenza ed unicità si ottiene $L = (l_{i,j})$ e $U = (u_{i,j})$ con
$$u_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j < n; \\ -1/2 \text{ se } j - i = 1; \\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-n}\gamma_k \text{ se } i = j = n; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$
e
$$l_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j; \\ \sum_{k=1}^{j} 2^{k-j}\gamma_k \text{ se } i = n, j < n; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

4. Si ha $\det(A) = \det(U) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-n}\gamma_k$. Il risultato si ottiene anche sviluppando il determinante con la regola di Laplace sull'ultima riga di A.

5. Per il coefficiente di amplificazione c_i relativo a γ_i si ha

$$|c_i| = \frac{2^{i-n}|\gamma_i|}{|\det(A)|}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Per il denominatore si ha

$$|\det(A)| = |1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-n}\gamma_k \geq 1 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-n}|\gamma_k| \geq 1 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-n-1} \geq 1/2$$

da cui

$$|c_i| \leq 2^{i-n}, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

6.
```
function [y] = mat_prod(gamma, b)
n=length(b);
y=zeros(n,1);
for k=1:n-1
    y(k)=b(k)-0.5*b(k+1);
end
y(n)=gamma'*b(1:n-1)+b(n);
end
```