

CALCOLO NUMERICO
 Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
 A.A. 2014/2015 – Appello 07/09/2015

NOME

COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1 Sia $p(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i + z^n$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$, un polinomio monico di grado n con zeri distinti e sia $F \in \mathbb{C}^{n \times n}$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

la matrice “companion” associata a $p(z)$.

1. Si mostri che per $1 \leq j \leq n$ si ha

$$F [1, \lambda_j, \dots, \lambda_j^{n-1}]^T = \lambda_j [1, \lambda_j, \dots, \lambda_j^{n-1}]^T.$$

2. Si dimostri che F è diagonalizzabile.
3. Si dimostri che per gli zeri di $p(z)$ vale

$$\max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \leq \max\{1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\}.$$

4. Scrivere una funzione Matlab[®] che dato in input che dati in input un vettore $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^n$ ed un naturale $k > 0$, restituisce in output il vettore formato dalle n -esime componenti dei vettori generati in k passi del metodo delle potenze applicato alla matrice F a partire dal vettore $\mathbf{e} = [1, 0, \dots, 0]^T$.
5. Riportare le ultime 3 componenti del vettore generato dal programma con $\mathbf{a} = [-15, \dots, -1]^T$ e $k = 48$.
6. Utilizzando queste componenti determinare le approssimazioni dello zero di modulo massimo del polinomio

$$p(z) = z^{15} - \sum_{i=0}^{14} (15 - i) z^i.$$