Alcuni Problemi Numerici in Teoria dell'Approssimazione

Luca Gemignani
luca.gemignani@unipi.it

27 marzo 2018

Indice

Lezione 1: Introduzione.

La teoria dell'approssimazione si occupa dell'approssimazione di funzioni e di dati ad esse associati (zeri, derivate, integrali, ...) mediante lo sviluppo di metodi ed algoritmi numerici. L'ambito di ricerca e di sviluppo di questi metodi è assai meno strutturato rispetto a quello dell'algebra lineare numerica. Gli algoritmi sono molteplici ed in generale il loro ambito di applicabilià è ristretto e soggetto alla verifica di opportune condizioni. Ciò è essenzialmente dovuto alla variabilità della struttura dei dati di ingresso. Nel seguito infatti faremo spesso riferimento a termini quali "data la funzione f" o "assegnata una funzione f". Sebbene formalmente accettabile questa terminologia nasconde diverse criticità computazionali. È infatti evidente che lo scenario varia radicalmente se la funzione f è nota in forma esplicita o se la funzione f è implicitamente disponibile mediante un algoritmo che restituisce il valore della funzione ed eventualmente delle sue derivate in ogni punto. Inoltre le proprietà di regolarità della funzione impattano drammaticamente sulla disponibilità e sulle prestazioni degli algoritmi di risoluzione.

Nel seguito ci occuperemo dei seguenti problemi:

1. *approssimazione degli zeri di una funzione*;

2. *approssimazione polinomiale di una funzione*;

3. *approssimazione dell'integrale definito di una funzione.*

In questa breve nota introduciamo questi problemi insieme ad alcune considerazioni computazionali riguardo il loro condizionamento.

Lezione 2: Il Problema del Calcolo degli Zeri di una Funzione.

Il problema dell'approssimazione numerica degli zeri di una funzione reale di variabile reale viene generalmente formulato nel modo seguente.

Problema 2.1. Data una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ si cercano (se esistono) valori della variabile per cui la funzione si annulla. Se $\xi \in [a,b]$ è un tale valore, i.e., $f(\xi) = 0$, allora ξ è detto *zero della funzione* o, equivalentemente, *radice dell'equazione* $f(x) = 0$.

Un ben noto risultato che assicura l'esistenza di uno zero è il seguente *teorema di esistenza degli zeri.*

Teorema 2.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$, con $f(a)f(b) < 0$ allora $\exists\ \xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$.

Per l'approssimazione numerica degli zeri di una funzione si introducono tecniche iterative che a partire da un dato iniziale x_0 generano una successione $\{x_k\}$ di approssimazioni che sotto opportune ipotesi convergono ad uno zero della funzione, i.e.,

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi, \quad f(\xi) = 0.$$

IL caso non lineare presenta molteplici criticità rispetto al caso lineare. In particolare la convergenza dipende fortemente dalla scelta del punto iniziale e dalle proprietà della funzione ed eventualmente delle sue derivate. Qualunque metodo si intenda applicare, sarà quindi generalmente necessario effettuare uno studio preliminare della funzione in modo da *localizzare le eventuali radici*, i.e. determinare un intervallo che contenga una e una sola radice.

Le proprietà della funzione e delle sue derivate determinano anche il condizionamento del problema. Per semplicità di trattazione assumiamo che $f(x) = \phi(x) - d$ con $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^2((a,b))$. Se $\xi \in (a,b)$ soddisfa $f(\xi) = 0$, $f'(\xi) \neq 0$ e $\hat{\xi} \in (a,b)$ soddisfa $\hat{f}(\hat{\xi}) = \phi(\hat{\xi}) - \hat{d} = 0$ con $\hat{d} = d + \epsilon$, $|\epsilon| \leq u$,allora vale

$$0 = \hat{f}(\hat{\xi}) = \phi(\hat{\xi}) - \hat{d} = \phi(\hat{\xi}) - \phi(\xi) - \epsilon,$$

da cui

$$|\hat{\xi} - \xi| \doteq \frac{|\epsilon|}{|f'(\xi)|},$$

da cui segue che

$$c = |f'(\xi)|^{-1}$$

è una misura del condizionamento del calcolo della radice semplice ξ dell'equazione $f(x) = 0$. Quando $|f'(\xi)|$ è piccolo (idealmente zero) il problema diviene mal condizionato.

Lezione 3: Il Problema dell'Approssimazione Polinomiale di una Funzione.

Il problema dell'approssimazione di una funzione si pone in diversi contesti applicativi. Per la valutazione di una funzione non razionale in macchina si richiede la determinazione di funzioni approssimanti di tipo polinomiale o razionale che possano essere valutate con un numero finito di operazioni aritmetiche. In molti contesti sperimentali una funzione incognita è nota mediante i valori (misure) assunti per differenti valori della variabile indipendente. In questi casi si cerca *un modello* ovvero una rappresentazione della funzione che ne consenta uno studio qualitativo e quantitativo. Infine lo sviluppo di appprossimazioni razionali e polinomiali di una funzione è alla base dei *metodi automatici per il calcolo di integrali e derivate.*

Di particolare interesse risulta il *problema dell'interpolazione polinomiale.*

Problema 3.1. Sia Π_n lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale ad n. Assegnata $\phi_0(x), \ldots, \phi_n(x)$ una base di Π_n e date $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $0 \le i \le n$, $n+1$ coppie di numeri reali con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, si vuole determinare $\phi(x) \in \Pi_n$, i.e.,

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi_i(x),$$

tale che $\phi(x_i) = y_i$ per $i = 0, \ldots, n$.

I punti x_i sono detti *nodi dell'interpolazione.* Le condizioni $\phi(x_i) = y_i$ sono dette *condizioni di interpolazione.* Il polinomio $\phi(x)$ è detto *polinomio di interpolazione* sui punti (x_i, y_i). Se $y_i = f(x_i)$, $0 \le i \le n$, e cioè $\phi(x)$ è determinato in modo da assumere sui nodi dell'interpolazione lo stesso valore di una funzione noto o incognita $f(x)$ allora $\phi(x)$ è detto *polinomio di interpolazione* sui nodi x_i della funzione $f(x)$.

Da un punto di vista computazionale il calcolo del polinomio $\phi(x)$ si riduce alla risoluzione di un sistema lineare. Il condizionamento del calcolo dei vettori dei coefficenti $\boldsymbol{\alpha}$ assegnata la base di Π_n ed i punti dell'interpolazione viene pertanto misurato dal numero di condizione della matrice dei coefficenti del sistema lineare associato. Per quanto invece concerne il condizionamento della valutazione del polinomio $\phi(x)$ rispetto a perturbazione dei coefficenti si mostra facilmente che

$$|\sum_{i=0}^{n} \hat{\alpha}_i \phi_i(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi_i(x)| \le \| \hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha} \|_\infty \sum_{i=0}^{n} |\phi_i(x)|.$$

Se $a \leq x_1 < x_2 \ldots < x_n \leq b$ si ha che

$$\Delta = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\phi_i(x)|$$

definisce un indice o misura di condizionamento dell'approssimazione rispetto a perturbazione dei coefficienti. Il problema della stima del valore di Δ per una data configurazioni dei nodi è in generale di difficile soluzione. Per un'opportuna scelta della base di Π_n è noto come *problema della determinazione della costante di Lebesgue.*

Lezione 4: IL Problema del Calcolo dell'Integrale Definito di una Funzione.

Il problema del calcolo dell'integrale definito di una funzione è formulato come segue.

Problema 4.1. Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$, si vuole calcolare l'integrale definito

$$\mathcal{I}(f,a,b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Il concetto di integrale fondamentale nel calcolo e ha un'ampia applicazione in tutte le discipline scientifiche e tecnologiche. È associato al problema classico *del calcolo delle aree e dei volumi.* Metodi numerici per l'approssimazione di $\mathcal{I}(f,a,b)$ trovano inoltre applicazione nella risoluzione di *equazioni differenziali.* IL concetto di integrale è introdotto mediante un processo di limite che sarà approssimato mediante la costruzione di somme finite ottenute a partire da approssimazioni polinomiali della funzione integranda.

In generale il problema dell'integrazione numerica risulta "ben condizionato" come effetto delle proprietà di "smoothing" del processo di integrazione. In particolare rispetto a perturbazioni della funzione integranda abbiamo che

$$|\mathcal{I}(f,a,b) - \mathcal{I}(\hat{f},a,b)| \leq (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x) - \hat{f}(x)|.$$