Metodi Numerici per l'Approssimazione degli Zeri di una Funzione

Luca Gemignani
luca.gemignani@unipi.it

29 marzo 2018

Indice

Lezione 1: Il Metodo di Bisezione.

Il metodo di bisezione è presumibilmente il più antico metodo noto per il calcolo degli zeri di una funzione. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $f \in C^0([a,b])$ e $f(a)f(b) < 0$. Dal teorema di esistenza degli zeri segue che $\exists\ \xi \in [a,b]$ tale che $f(\xi) = 0$. Per la determinazione di un tale ξ il *metodo di bisezione* genera sequenze di approssimazioni $\{a_k\}, \{b_k\}$ e $\{c_k\}$ definite come segue:

```
a(1)=a; b(1)=b;
for k>=1
    c(k)=(a(k)+b(k))/2;
    if (f(a(k))*f(c(k)<=0)
        a(k+1)=a(k);
        b(k+1)=c(k);
    else
        a(k+1)=c(k);
        b(k+1)=b(k);
    end
end
```

Il seguente teorema illustra le proprietà di convergenza delle successioni.

Teorema 1.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $f \in C^0([a,b])$ e $f(a)f(b) < 0$. Per le successioni generate come sopra si ha

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k = \xi \in [a,b]$$

con

$$f(\xi) = 0.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che per costruzione $a_{k+1} \geq a_k$, $b_{k+1} \leq b_k$, $c_k \in [a_k, b_k] \subset [a,b]$, $0 \leq b_k - a_k \leq (b-a)/2^{k-1}$, $f(a_k)f(b_k) \leq 0$, $k \geq 1$. Ne segue che esistono $\xi, \eta \in [a,b]$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \xi, \quad \lim_{k\to\infty} b_k = \eta.$$

Dal teorema del confronto segue che

$$\xi = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \eta = \lim_{k\to\infty} c_k.$$

Per la continuità di f si ha

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k)f(b_k) = f(\xi)^2 \leq 0,$$

che implica

$$f(\xi) = 0.$$

□

Per l'implementazione in macchina del metodo di bisezione conviene fissare una tolleranza $\epsilon > 0$ e arrestare l'iterazione quando

$$b_{k+1} - a_{k+1} \leq \epsilon,$$

che garantisce

$$0 \leq \xi - a_{k+1} \leq \epsilon, \quad 0 \leq b_{k+1} - \xi \leq \epsilon, \quad 0 \leq |\xi - c_{k+1}| \leq \epsilon/2.$$

Poichè $0 \leq b_{k+1} - a_{k+1} \leq (b-a)/2^k$ si ha che la condizione risulta soddisfatta dopo

$$k \geq \lceil log_2(\frac{b-a}{\epsilon})\rceil,$$

iterazioni. Questo numero può essere significativamente elevato richiedendo molte valutazioni della funzione f. Il metodo di bisezione è quindi frequentemente utilizzato per fornire approssimazioni iniziali per procedure più efficienti. Il seguente programma implementa il metodo di bisezione in MatLab. La funzione è associata alla viariabile f mediante la costruzione di un "anonymous function".

```
function c = bisection(f,a,b, tol)

if f(a)*f(b)>0
    disp('non inclusione');
    c='non trovato';
    return
else
    err = b-a; fa=f(a);
    while err > tol
        c = (a + b)/2;
        fc=f(c);
        if fa*fc<=0
            b = c;
        else
            a = c;
            fa=fc;
        end
        err=b-a;
    end
    c = (a + b)/2;
end
```

Lezione 2: Metodi di Iterazione Funzionale.

Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Le equazioni $f(x) = 0$ e $g(x) - x = 0$ si dicono *equivalenti* se $f(\xi) = 0 \iff g(\xi) - \xi = 0$ ovvero se $f(\xi) = 0 \iff g(\xi) = \xi$. In tal caso la radice ξ dell'equazione $f(x) = 0$ è detta *punto fisso* della funzione $g(x)$. La riformulazione del problema della ricerca delle soluzioni di un'equazione come il problema della ricerca dei punti fissi di una funzione associata conduce all'introduzione dei metodi di iterazione funzionale del tipo

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b]; \\ x_{k+1} = g(x_k), \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Si ha infatti il seguente.

Teorema 2.1. Sia $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^0([a,b])$. Se $x_k \in [a,b]$, $k \geq 0$, e $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi$ allora $\xi \in [a,b]$ e $g(\xi) = \xi$.

Dimostrazione. Dalla relazione di limite segue che $\xi \in [a,b]$ e per la continuità di g che $g(\xi) = \xi$. $\square$

Il teorema precedente chiarisce che la dinamica di (1) nel caso non lineare è più complicata in quanto dobbiamo assicurare che la successione generata a partire da un punto iniziale x_0 è ben definita e convergente.

Definizione 2.1. Sia $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(\xi) = \xi$, $\xi \in (a,b)$. Il metodo (1) si dice *localmente convergente* in ξ se $\exists \rho > 0$ tale che $\forall x_0 \in [\xi - \rho, \xi + \rho] = I_\xi \subset [a,b]$ la successione generata dal metodo (1) soddisfa

1. $x_k \in I_\xi$ per ogni $k \geq 0$;
2. $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi$.

Un classico risultato che assicura la convergenza locale è il seguente *teorema del punto fisso*.

Teorema 2.2. Sia $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a,b])$, $g(\xi) = \xi$, $\xi \in (a,b)$. Se $\exists \rho > 0$ tale che $|g'(x)| < 1$ $\forall x \in [\xi - \rho, \xi + \rho] = I_\xi \subset [a,b]$ allora $\forall x_0 \in I_\xi$ la successione generata dal metodo (1) soddisfa

1. $x_k \in I_\xi$ per ogni $k \geq 0$;
2. $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi$.

Dimostrazione. Dal teorema di Weierstrass essendo $g'(x)$ continua e I_ξ chiuso e limitato abbiamo $\lambda = \max_{x\in I_\xi} |g'(x)| < 1$. Si dimostra che la successione generata dal metodo (1) a partire da $x_0 \in I_\xi$ soddisfa

$$|x_k - \xi| \leq \lambda^k \rho, \quad k \geq 0, \tag{2}$$

da cui segue la proprietà (1)

$$|x_k - \xi| \leq \lambda^k \rho \leq \rho \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_k \in I_\xi,$$

e la proprietà (2) per il teorema del confronto

$$0 \leq |x_k - \xi| \leq \lambda^k \rho \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to+\infty} |x_k - \xi| = 0.$$

La dimostrazione di (2) procede per induzione su k. Per $k = 0$ da $x_0 \in I_\xi$ si ha

$$|x_0 - \xi| \leq \lambda^0 \rho = \rho.$$

Assumiamo quindi (2) vera fino all'indice k. Si ha allora per il teorema di Lagrange

$$|x_{k+1} - \xi| = |g(x_k) - g(\xi)| = |g'(\eta_k)(x_k - \xi)| = |g'(\eta_k)||(x_k - \xi)|, \quad |\eta_k - \xi| \leq |x_k - \xi|.$$

Per l'ipotesi induttiva segue che $\eta_k \in I_\xi$ e dunque

$$|x_{k+1} - \xi| = |g'(\eta_k)||(x_k - \xi)| \leq \lambda \lambda^k \rho = \lambda^{k+1} \rho.$$

□

Dal teorema segue il seguente.

Teorema 2.3. Sia $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a,b])$, $g(\xi) = \xi$, $\xi \in (a,b)$. Se $|g'(\xi)| < 1$ allora il metodo (1) è localmente convergente in ξ.

Dimostrazione. Sia $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = |g'(x)| - 1$. Si ha che $h \in C^0([a,b])$, $h(\xi) < 0$ e dunque per il teorema della permanenza del segno $\exists I_\xi = [\xi-\rho, \xi+\rho] \subset [a,b]$ tale che $h(x) = |g'(x)| - 1 < 0$ $\forall x \in I_\xi$. La tesi allora segue dal teorema precedente. $\square$

Di interesse computazionale risulta anche la caratterizzazione della convergenza. Nelle ipotesi del teorema 2.3 si assuma che $0 < |g'(\xi)| < 1$. Sia $\{x_k\}$ la successione generata dal metodo (1) a partire da $x_0 \in I_\xi$ intorno di convergenza. Se $x_k \neq \xi$, $k \geq 0$, allora

$$\frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = |g'(\eta_k)|, \quad |\eta_k - \xi| \leq |x_k - \xi|,$$

da cui segue

$$0 < \lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = |g'(\xi)| < 1. \tag{3}$$

Definizione 2.2. Sia $\{x_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi \in \mathbb{R}$, $x_k \neq \xi$, $k \geq 0$. Se vale (3) allora la successione è detta convergere *linearmente*.

Se $g(\xi) = 0$ allora vale

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|} = 0. \tag{4}$$

e la convergenza è più rapida.

Definizione 2.3. Sia $\{x_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi \in \mathbb{R}$, $x_k \neq \xi$, $k \geq 0$. Se vale (4) allora la successione è detta convergere *superlinearmente*.

In particolare si distingue la seguente.

Definizione 2.4. Sia $\{x_k\}$ tale che $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi \in \mathbb{R}$, $x_k \neq \xi$, $k \geq 0$. Se vale

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^2} = \ell \in \mathbb{R}, \quad \ell \neq 0,$$

allora la successione è detta convergere *quadraticamente*.

Il teorema 2.3 fornisce una condizione sufficiente per la convergenza locale del metodo (1). La disamina del caso $|g'(\xi)| \geq 1$ risulta più involuta. Sia $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a,b])$, $g(\xi) = \xi$, $\xi \in (a,b)$ e $|g'(\xi)| > 1$. Sia $\{x_k\}$ una successione generata dal metodo (1) con $x_k \in [a,b]$, $x_k \neq \xi$, $k \geq 0$. Allora si conclude che la successione non converge a ξ.

♠ FAC Si assuma per assurdo che $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi$. Sia $I_\xi = [\xi-\rho, \xi+\rho] \subset [a,b]$ tale che $|g'(x)| \geq \lambda > 1$ $\forall x \in I_\xi$. Dalla definizione di limite si ha che $\exists \ell$ tale che $\forall k \geq \ell$ $x_k \in I_\xi$. Ma dal teorema di Lagrange segue che se $x_k \in I_\xi$ allora $\exists m > k$ tale che $x_m \notin I_\xi$ che contraddice la relazione di limite.

Ne segue che se l'equazione $g(x) = \xi$ ha $x = \xi$ come unica soluzione in $[a, b]$ allora il metodo (1) non è localmente convergente in ξ. A patto quindi di restringere eventualmente l'intervallo $[a, b]$ si conclude che se $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g \in C^1([a, b])$, $g(\xi) = \xi$, $\xi \in (a, b)$ e $|g'(\xi)| > 1$ allora il metodo (1) non è localmente convergente in ξ. Se $|g'(\xi)| = 1$ si possono presentare situazioni di convergenza e di non convergenza richiedendo pertanto una valutazione specifica caso per caso.

L'implementazione del metodo (1) richiede la selezione di un opportuno *criterio di arresto* del tipo

$$|x_{k+1} - x_k| \le tol, \quad \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} \le tol.$$

Se $g \in C^1([a, b])$ allora

$$|x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - \xi + \xi - x_k| = |g'(\xi_k) - 1||x_k - \xi|,$$

da cui si conclude che

$$|x_k - \xi| \le \frac{tol}{|g'(\xi_k) - 1|}.$$

Ne segue che l'approssimazione restituita può essere scadente se $g'(\xi)$ è prossimo ad 1.

Lezione 3: Il Metodo delle Tangenti.

Il più noto metodo di iterazione funzionale è il metodo delle tangenti o di Newton. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$, $f(\xi) = 0$, $\xi \in (a, b)$. Assegnata un'approssimazione iniziale $x_0 \in (a, b)$ di ξ con $f'(x_0) \neq 0$ sia $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. Il punto di intersezione della retta con l'asse $y = 0$ ha ascissa

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

che si assume come nuova approssimazione di ξ. Iterando la procedura si ottiene il seguente metodo detto *metodo delle tangenti o di Newton*:

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b]; \\ x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

Il primo risultato espone le proprietà di convergenza locale del metodo per l'approssimazione di *radici semplici*.

Teorema 3.1. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a, b])$, $f(\xi) = 0$, $f'(\xi) \neq 0$, $\xi \in (a, b)$. Allora il metodo (5) è localmente convergente in ξ, i.e., $\exists \rho > 0$ tale che $\forall x_0 \in [\xi - \rho, \xi + \rho] = I_\xi \subset [a, b]$ la successione generata dal metodo (5) soddisfa

1. $x_k \in I_\xi$ per ogni $k \geq 0$;

2. $\lim_{k\to+\infty} x_k = \xi$.

Se inoltre tale successione verifica $x_k \neq \xi$, $k \geq 0$, allora la convergenza è almeno quadratica, i.e.,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\xi|}{|x_k-\xi|^2} = \ell \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione. Da $f'(\xi) \neq 0$ per il teorema della permanenza del segno segue che $\exists I'_\xi = [\xi-\rho', \xi+\rho'] \subset [a,b]$ tale che $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I'_\xi$. Si verifica quindi che la funzione di iterazione $g\colon I'_\xi \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ soddisfa $g \in C^1(I'_\xi)$ e $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$. Poichè quindi $g'(\xi) = 0$ la prima parte del teorema segue dal teorema 2.3. Per la stima della velocità di convergenza dallo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine si ottiene

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k)(\xi - x_k) + \frac{f''(\eta_k)(\xi-x_k)^2}{2}, \quad |\eta_k - \xi| \leq |x_k - \xi|,$$

da cui

$$x_{k+1} - \xi = \frac{f''(\eta_k)(\xi - x_k)^2}{2f'(x_k)}, \quad |\eta_k - \xi| \leq |x_k - \xi|,$$

da cui si ricava per continuità di $f'(x)$ e $f''(x)$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1}-\xi|}{|x_k-\xi|^2} = \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right| \in \mathbb{R}.$$

□

Di rilevante interesse computazionale sono anche per il metodo delle tangenti alcuni risultati di *convergenza in grande*. Nella seguente versione si assicura la convergenza per punti iniziali opportunamente scelti in un intervallo destro della soluzione. Un analogo risultato può essere formulato per un intervallo sinistro.

Teorema 3.2. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a,b])$, $f(\xi) = 0$, $\xi \in (a,b)$. Se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in (\xi, \xi+\delta] = I_\delta \subset [a,b]$ si ha

1. $f'(x) \neq 0$;

2. $f(x)f''(x) > 0$;

allora il metodo (5) con $x_0 \in I_\delta$ genera successioni convergenti ad ξ.

Dimostrazione. Si osserva che $f'(x)$ ha segno costante in I_δ. Si assuma per fissare le idee che $f'(x) > 0$. Allora segue che $f(x) > 0$ e $f''(x) > 0$. Si ha allora che

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq x_0.$$

Inoltre

$$x_1 - \xi = g(x_0) - g(\xi) = g'(\eta_0)(x_0 - \xi) = \frac{f(\eta_0)f''(\eta_0)}{(f'(\eta_0))^2}(x_0 - \xi) > 0,$$

e quindi

$$\xi < x_1 \leq x_0 \leq \xi + \delta.$$

In modo analogo si dimostra per induzione che per i termini della successione vale

$$\xi < x_{k+1} \leq x_k \leq \xi + \delta, \quad k \geq 0.$$

Ne segue che

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha \in [\xi, \xi + \delta],$$

e dunque

$$\alpha = g(\alpha) \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \xi.$$

□

Lezione 4: Il Caso delle Equazioni Algebriche.

Un problema di rilevante interesse applicativo è il calcolo delle radici di un'equazione algebrica a coefficienti reali

$$f(x) = p(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 = 0, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad p_n \neq 0$$

È ben noto che l'equazione ammette n radici eventualmente complesse contate con le loro molteplicità. Per la determinazione di alcune radici reali il metodo di Newton può essere utilizzato e richiede ad ogni iterazione una valutazione del polinomio e della sua derivata. Il seguente *algoritmo di Horner* è impiegato per il calcolo.

```
function [px,dx] = horner(p, x0)
 n1=length(p);
 n=n1-1;
 px = p(n+1);
 dx= 0;
   for k= n:-1:1
       dx= px + x0 * dx;
       px = p(k)+ x0 * px;
   end

end
```

Per l'approssimazione di tutte le radici reali e complesse dell'equazione è conveniente la riformulazione del problema in termini del calcolo degli autovalori di una opportuna matrice detta *matrice companion* associata con il polinomio $p(x)$. Si ha che posto

$$F(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\frac{p_0}{p_n} & \dots & \dots & -\frac{p_{n-1}}{p_n} \end{bmatrix},$$

allora

$$\det(xI_n - F(\boldsymbol{p})) = p(x)/p_n,$$

e dunque il problema del calcolo delle radici dell'equazione algebrica è ricondotto al calcolo degli autovalori della matrice $F(\boldsymbol{p})$. Questo approccio è seguito in Matlab ed il comando `roots` implementa la procedura descritta.