Interpolazione Polinomiale ed Integrazione Numerica

Luca Gemignani
luca.gemignani@unipi.it

3 aprile 2018

Indice

Lezione 1: Il Problema dell'Intepolazione Polinomiale.

L'approssimazione mediante polinomi riveste una notevole importanza data la relativa facilità con cui quest'ultimi possono essere manipolati in un ambiente computazionale. Le tecniche di approssimazione basate sul processo di *interpolazione* poggiano sul seguente risultato di *esistenza ed unicità*.

Teorema 1.1. Sia Π_n lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore od uguale ad n e sia $\Phi = \{\phi_0(x), \dots, \phi_n(x)\}$ una base di Π_n. Assegnate $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $0 \le i \le n$, $n+1$ coppie di numeri reali con $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, esiste ed è unico il polinomio $p(x) \in \Pi_n$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi_i(x)$ tale che

$$p(x_k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \phi_i(x_k) = y_k, \quad 0 \le k \le n. \tag{1}$$

Tale polinomio è detto *il polinomio di interpolazione* sui punti $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $0 \le i \le n$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue osservando che le condizioni di interpolazione (1) definiscono un sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \dots & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \dots & \dots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \dots & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

e dunque l'esistenza e l'unicità del polinomio di interpolazione sui punti $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq i \leq n\}$, segue se mostriamo che la matrice dei coefficienti è invertibile. A tal fine detta $V(\mathcal{S}, \Phi)$ tale matrice proviamo che $\mathrm{Ker}(V(\mathcal{S}, \Phi) = \{\mathbf{0}\}$. Sia $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \dots, \beta_n]^T$ un vettore del nucleo. Dalla relazione

$$V(\mathcal{S}, \Phi)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0},$$

segue che il polinomio $b(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \phi_i(x)$ si annulla in almeno $n + 1$ punti distinti e pertanto per il principio di identità dei polinomi $b(x)$ è identicamente nullo. Essendo Φ una base di Π_n ne discende che $\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$. □

Se l'insieme dei punti $\mathcal{S} = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq i \leq n\}$ soddisfa $x_i \neq x_j$ per $1 \leq i \neq j \leq n$, allora il teorema afferma l'esistenza e l'unicità del polinomio di interpolazione $p(x)$. La rappresentazione ed il calcolo dei coefficienti della rappresentazione dipendono dalla scelta della base Φ di Π_n.

1. Se $\phi_j(x) = x^j$, $0 \leq j \leq n$, è l'usuale base dei *monomi* allora

   $$V(\mathcal{S}, \Phi) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & x_0^n \\ 1 & \dots & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & x_n^n \end{bmatrix},$$

   è detta *matrice di Vandermonde.* Il calcolo dei coefficienti del polinomio di interpolazione nella base dei monomi risulta generalmente *mal condizionato.* La risoluzione del sistema lineare richiede al più $O(n^3)$ operazioni aritmetiche.

2. Se $\phi_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$, $0 \leq j \leq n$, allora matrice associata $V(\mathcal{S}, \Phi)$ risulta triangolare inferiore. Infatti vale

   $$(V(\mathcal{S}, \Phi))_{h+1,k+1} = \prod_{i=0}^{k}(x_h - x_i) = 0 \text{ se } h \leq k.$$

   La rappresentazione di $p(x)$ è detta *forma di Newton* del polinomio di interpolazione. Il calcolo dei coefficienti del polinomio di interpolazione nella base di Newton risulta generalmente *mal condizionato.* La risoluzione del sistema lineare richiede al più $O(n^2)$ operazioni aritmetiche.

3. Se
$$\phi_j(x) = L_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad 0 \le j \le n,$$
allora $V(\mathcal{S}, \Phi) = I_n$. Infatti vale
$$(V(\mathcal{S}, \Phi))_{h+1,k+1} = L_k(x_h) = \begin{cases} 1 \text{ se } h = k; \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$
La rappresentazione di $p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)$ è detta *forma di Lagrange* del polinomio di interpolazione. IL calcolo dei coefficenti $\alpha_j = y_j$ risulta perfettamente condizionato e non richiede operazioni aritmetiche.

In molteplici contesti applicativi piuttosto che ai coefficenti della rappresentazione si è interessati alla valutazione del polinomio di interpolazione in punti differenti dai nodi. Per la forma di Lagrange si ottiene

$$p(\hat{x}) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(\hat{x}) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{\hat{x} - x_i}{x_j - x_i} = \prod_{i=0}^{n} (\hat{x} - x_i) \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j (\hat{x} - x_j)}{\omega_j},$$

con $\omega_j = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} (x_j - x_i)$, $0 \le j \le n$. Se allora i pesi ω_j sono precomputati e già disponibili la valutazione di $p(\hat{x})$ richiede al più $O(n)$ operazioni aritmetiche.

Lezione 2: Resto dell' Interpolazione Polinomiale.

Se $y_j = f(x_j)$, $0 \le j \le n$, allora le tecniche di interpolazione consentono di approssimare la funzione eventualmente incognita f in punti differenti dai nodi. In tal caso risulta essenziale disporre di misure dell'errore commesso nell'approssimazione. Il seguente è detto *teorema del resto dell'interpolazione polinomiale.*

Teorema 2.1. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}([a,b])$, e siano $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ $n+1$ nodi distinti. Detto $p(x)$ il polinomio di interpolazione sui punti $\mathcal{S} = \{(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R}^2, 0 \le i \le n\}$ si ha

$$\forall \hat{x} \in [a,b]\ \exists \hat{\xi} \in [a,b]\colon f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\hat{\xi})}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (\hat{x} - x_i).$$

Dimostrazione. Se $\hat{x} = x_i$ per un certo i allora $f(\hat{x}) - p(\hat{x}) = f(x_i) - p(x_i) = 0$ per le condizioni di interpolazione ed inoltre $\prod_{j=0}^{n} (\hat{x} - x_j) = \prod_{j=0}^{n} (x_i - x_i) = 0$. Segue dunque che la relazioned è verificata per ogni $\hat{\xi} \in [a,b]$.

Si supponga ora $\hat{x} \neq x_i$, $0 \le i \le n$. Si consideri la funzione ausiliaria

$$h(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(\hat{x}) - p(\hat{x})}{\prod_{j=0}^{n} (\hat{x} - x_j)} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Si osservi che $h(x_i) = 0$, $0 \leq i \leq n$, e $h(\hat{x}) = 0$. Pertanto la funzione si annulla in almeno $n+2$ punti distinti in $[a, b]$. Inoltre $h(x)$ eredita la regolarità di $f(x)$ essendo le altre due componenti polinomi in x di grado rispettivamente $\leq n$ e $n+1$. Dal teorema di Rolle segue che $h'(x)$ si annulla in almeno n punti distinti in $[a, b]$ ed, iterando il ragionamento, che $h^{(n+1)}(x)$ si annulla in almeno 1 punto detto $\hat{\xi} \in [a, b]$. Si ha pertanto

$$0 = h^{(n+1)}(\hat{\xi}) = f^{(n+1)}(\hat{\xi}) - \frac{f(\hat{x}) - p(\hat{x})}{\prod_{j=0}^{n}(\hat{x} - x_j)}(n+1)!,$$

da cui la tesi. □

Se l'intervallo $[a, b]$ è sufficientemente piccolo o se $f^{(n+1)}(x)$ non varia molto in $[a, b]$ allora ne segue che la qualità dell'approssimazione dell'interpolante polinomiale dipende essenzialmente dal fattore $\prod_{i=0}^{n}(\hat{x} - x_i)$. Se $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$, $0 \leq j \leq n$, sono equispaziati in $[a, b]$ allora dal grafico di $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ si evince che la qualità è migliore per punti $\hat{x}$ centrali mentre si deteriora procedendo verso gli estremi dell'intervallo. In particolare l'andamento oscillante del grafico e l'aumentare della ampiezza delle oscillazioni agli estremi dell'intervallo suggerisce la possibilità di errori di approssimazione elevati in prossimità degli estremi dell'intervallo. Tale evidenza sperimentale è confermata teoricamente come mostra il seguente *esempio di Runge*. Sia $f(x) = 1/(1+x^2)$ $a = -5, b = 5$, $x_j = -5 + j(10/n)$, $0 \leq j \leq n$. Detto $p_n(x)$ il polinomio di interpolazione sui nodi $\mathcal{S} = \{(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq i \leq n\}$ si ha che $\exists \gamma \in (3, 4)$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} |f(\hat{x}) - p(\hat{x})| = +\infty, \quad \forall \hat{x} \colon \gamma \leq |\hat{x}| \leq 5.$$

Lezione 3: Integrazione Numerica.

Una delle applicazioni più interessanti dei metodi di interpolazione polinomiale concerne la sintesi di algoritmi numerici per l'approssimazione dell'integrale definito $\mathcal{I}(f, a, b) = \int_a^b f(x)dx$. L'approccio seguente conduce alle *formule di Newton-Cotes*. Posto $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$, $0 \leq j \leq n$, $n+1$ punti equispaziati in $[a, b]$ e detto $p_n(x)$ il polinomio di interpolazione sui nodi $\mathcal{S} = \{(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq i \leq n\}$ si considera l'approssimazione di $\mathcal{I}(f, a, b)$ fornita da $\mathcal{I}(p_n, a, b)$. Si ha

$$\mathcal{I}(p_n, a, b) = \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x)dx = \sum_{j=0}^{n} y_j \int_a^b L_j(x)dx.$$

Inoltre posto $x = a + t\frac{b-a}{n}$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t \leq n$, vale per $0 \leq j \leq n$,

$$\int_a^b L_j(x)dx = \int_a^b \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}dx = \frac{b-a}{n}\int_0^n \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{t-i}{j-i}dt = \frac{b-a}{n}\sigma_j^{(n)},$$

dove i pesi $\sigma_j^{(n)}$, $0 \leq j \leq n$, sono funzioni di j ed n e non dipendono né dalla funzione integranda f e né dall'intervallo di integrazione $[a, b]$ e pertanto possono essere precomputati e tabulati. L'approssimazione così ottenuta

$$\mathcal{I}(p_n, a, b) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n} y_j \sigma_j^{(n)} = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \sigma_j^{(n)},$$

è detta *formula di Newton-Cotes* su $n+1$ nodi. Per $n = 1$ si ottiene la *formula dei trapezi*. Per $n = 2$ si ottiene la *formula di Cavalieri-Simpson*. Per $n \geq 7$ compaiono pesi negativi il che comporta difficoltà numeriche e preclude teoricamente ad una dimostrazione della convergenza di $\mathcal{I}(p_n, a, b)$ a $\mathcal{I}(f, a, b)$ –risultato peraltro atteso se pensiamo al comportamento dell'interpolazione polinomiale su nodi equidistanti (esempio di Runge)–.

Per ottenere una sequenza di approssimazioni convergenti si procede come segue. Si ha

$$\mathcal{I}(f, a, b) = \int_a^b f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{I}(f, x_j, x_{j+1}).$$

Per l'approssimazione di ciascun integrale $\mathcal{I}(f, x_j, x_{j+1})$, $0 \leq j \leq n-1$, si utilizza una formula di Newton-Cotes su $m+1$ punti con m fissato e $m \leq 6$. Si parla in tal caso di applicazione iterata della formula in oggetto. Per $m = 1$ si ha

$$\mathcal{I}_1^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{I}(p_1, x_j, x_{j+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}.$$

detta *formula dei trapezi iterata*. Per una stima dell'errore commesso nell'approssimazione di $\mathcal{I}(f, a, b)$ con $\mathcal{I}_1^{(n)}$ si assuma che $f \in C^2([a, b])$. Si ponga

$$\mathcal{E}_1^{(n)} = \mathcal{I}(f, a, b) - \mathcal{I}_1^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{I}(f, x_j, x_{j+1}) - \mathcal{I}(p_1, x_j, x_{j+1})).$$

Dal teorema del resto dell'interpolazione polinomiale segue che

$$|\mathcal{I}(f, x_j, x_{j+1}) - \mathcal{I}(p_1, x_j, x_{j+1})| \leq \frac{M}{2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)(x_{j+1} - x) dx, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

con $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ e quindi

$$|\mathcal{I}(f, x_j, x_{j+1}) - \mathcal{I}(p_1, x_j, x_{j+1})| \leq \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3}, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Ne discende che

$$0 \leq |\mathcal{E}_1^{(n)}| \leq n \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2},$$

e pertanto dal teorema del confronto

$$\lim_{n \to +\infty} |\mathcal{E}_1^{(n)}| = \lim_{n \to +\infty} |\mathcal{I}(f, a, b) - \mathcal{I}_1^{(n)}| = 0.$$

Risultati analoghi si trovano per le altre formule iterate. In pratica se è disponibile una stima (maggiorazione) di M il precedente risultato ci descrive una strategia per la determinazione di n in modo da garantire una fissata accuratezza nell'approssimazione dell'integrale. Infatti detta *tol* questa accuratezza si ha che se il valore di n è determinato in modo tale che

$$\frac{M}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} \leq tol$$

allora si ha

$$|\mathcal{I}(f,a,b) - \mathcal{I}_1^{(n)}| \leq tol.$$

Se tale stima non è disponibile si può applicare una strategia dove ad ogni passo si raddoppia il numero dei punti fintanto che due stime consecutive non sono sufficientemente vicine. L'assunzione di nodi equidistanti è una semplificazione forte. In realtà nelle applicazioni pratiche si usano distribuzioni di nodi *adattative* in cui i nodi vengono addensati in modo automatico dove necessario (es. in zone con brusche variazioni della funzione integranda). Ad esempio si possono raddoppiare i nodi nei soli intervalli che presentano scostamenti significativi.