CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2012/2013 – Appello 24/07/2013

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1 Si intende approssimare la funzione $f(t) = \sin(\frac{\pi}{2}t)$ per $0 \leq t \leq 1$ con un polinomio $p_n(t)$ della forma

$$p_n(t) = t + t(1-t)\sum_{j=1}^{n} c_j t^{j-1}. \quad (1)$$

Posto $t_k = \dfrac{k}{n+1}$, $1 \leq k \leq n$, si consideri il seguente sistema lineare determinato dalle condizioni di interpolazione

$$\begin{cases} p_n(t_1) = f(t_1) \\ p_n(t_2) = f(t_2) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ p_n(t_n) = f(t_n) \end{cases} \quad (2)$$

nelle incognite $c_1, \ldots, c_n$.

1. Dimostrare che esiste ed è unica la soluzione del sistema lineare (2).
2. Scrivere una funzione Matlab® che dati in input il valore di $n \in \mathbb{N}$ utilizzando l'operatore "backslash" \ restituisce in output la soluzione $[c_1, \ldots, c_n]^T$ del sistema lineare (2).
3. Per $n = 5$ e $n = 15$ riportare il numero di condizionamento in norma infinito della matrice dei coefficienti del sistema lineare valutato dalla funzione `cond`.
4. Posto $\boldsymbol{y}^T = [y_1, \ldots, y_{1000}]$ con $y_i = \dfrac{i-1}{999}$, $1 \leq i \leq 1000$, calcolare

   $$e_5 = \max_i |f(y_i) - p_5(y_i)|, \quad e_{15} = \max_i |f(y_i) - p_{15}(y_i)|,$$

   dove $p_5(t)$ e $p_{15}(t)$ sono determinati come in (1) a partire dai coefficienti calcolati dalla funzione rispettivamente per $n = 5$ e $n = 15$.
5. Dimostrare che $p_n(t)$ è il polinomio di interpolazione alla funzione $f(t)$ sui nodi $0, t_1, \ldots, t_n, 1$.
6. Mediante il teorema del resto dell'interpolazione polinomiale determinare quindi una maggiorazione dell'errore

   $$\epsilon_n = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t) - p_n(t)|.$$