CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2016/2017 – Appello 15/02/2018

NOME	COGNOME	MATRICOLA

Esercizio 1 Dati $x_k = k/n$, $1 \leq k \leq n$, $n \geq 1$, sia $A_n = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice definita da $a_{i,j} = x_j^{i-1}$, $1 \leq i, j \leq n$. Per $n = 4$ si ottiene

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix}, \quad x_k = \frac{k}{4}, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

1. Si mostri che A_n è invertibile.

2. Posto
$$L_j(x) = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i^{(j)} x^i, \quad 1 \leq j \leq n,$$
il $j-$esimo polinomio di Lagrange e la sua rappresentazione nella usuale base dei monomi, si mostri che
$$A_n^{-1}(j, :\,) = \left[p_0^{(j)}, p_1^{(j)}, \ldots, p_{n-1}^{(j)}\right], \quad 1 \leq j \leq n,$$
ovvero che
$$\left[p_0^{(j)}, p_1^{(j)}, \ldots, p_{n-1}^{(j)}\right] A_n = \boldsymbol{e}_j^T, \quad 1 \leq j \leq n,$$
con $\boldsymbol{e}_j$ il $j-$esimo vettore della base canonica.

3. Per n dispari si determini $L_{(n+1)/2}(0) = p_0^{(n+1)/2}$ e se ne deduca una limitazione inferiore per il condizionamento in norma infinito di A_n mostrando che
$$\| A_n \|_\infty \cdot \| A_n^{-1} \|_\infty \geq \binom{n}{\frac{n+1}{2}}.$$

4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, e $t \in [0, n]$ restituisce in output il valore $L_j(t/n)$.

5. Scrivere poi una funzione Matlab che dato $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, n]$ restituisce in output il valore del polinomio di interpolazione $p(t/n) = \sum_{j=1}^{n} y_j L_j(t/n)$.

6. Per $n = 21$, si riporti il grafico del polinomio di interpolazione $p(x)$ sui nodi x_i, $1 \leq i \leq n$, alla funzione $f(x) = \cos(x)$ nell'intervallo $[0, 1]$ generato dal comando `plot` utilizzando le funzioni implementate ai punti precedenti.