Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Terzo compitino - 21/5/2014

Esercizio 1.
Sia $A_3(\mathbb{R})$ il sottospazio di $M(3,\mathbb{R})$ formato dalle matrici antisimmetriche e sia $B \in M(3,\mathbb{R})$ una fissata matrice simmetrica.

a) Si verifichi che $BX + XB \in A_3(\mathbb{R})$ per ogni $X \in A_3(\mathbb{R})$.

b) Sia f_B l'endomorfismo di $A_3(\mathbb{R})$ definito da $f_B(X) = BX + XB$. Si provi che, se $tr(B)$ non è un autovalore per B, allora f_B è un isomorfismo.

Esercizio 2.
Sia $Isom(\mathbb{R}^3)$ il gruppo delle applicazioni biunivoche di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che conservano la distanza euclidea. Siano H_1, H_2, H_3 tre piani affini di $\mathbb{R}^3$ a due a due distinti. Siano r_1, r_2, r_3 le riflessioni di $Isom(\mathbb{R}^3)$ tali che $Fix(r_i) = H_i$ per $i = 1, 2, 3$. Sia $f = r_1 \circ r_2 \circ r_3$ e si supponga che $Fix(f)$ sia non vuoto e di dimensione < 2. Si provi che $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ consiste di un singolo punto.

Esercizio 3.

a) Si verifichi che il luogo geometrico $\mathcal{C}$ dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti dalle rette

$$r_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, z = 1\}, \quad r_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1, z = -1\}$$

è una quadrica e se ne determini la forma canonica affine.

b) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui la quadrica $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente alla quadrica $\mathcal{C}_h$ di equazione $hx^2 + hy^2 - 2xy - 2hz^2 + 4x + h = 0$.

<u>Soluzioni</u>

Esercizio 1.

a) Per ogni $X \in A_3(\mathbb{R})$ si ha ${}^t(BX + XB) = {}^tX{}^tB + {}^tB{}^tX = -XB - BX = -(BX + XB)$.

b) Per provare che f_B è un isomorfismo basta provare che f_B è iniettiva. Sia dunque $X \in \operatorname{Ker} f_B$, ossia $BX + XB = 0$. Per il Teorema spettrale esiste $P \in O(3)$ tale che $B' = {}^tPBP$ è diagonale, diciamo $B' = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$. Poiché B e B' sono simili, $\operatorname{tr}(B) = \alpha + \beta + \gamma$. Per l'ipotesi $\alpha + \beta + \gamma \neq \alpha$, ossia $\beta + \gamma \neq 0$; in modo analogo si ha che $\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha + \gamma \neq 0$.

Sia $X' = {}^tPXP$. Si vede subito che X' è antisimmetrica e che $B'X' + X'B' = 0$. Se $X' = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$, allora $B'X' + X'B' = \begin{pmatrix} 0 & a(\alpha+\beta) & b(\alpha+\gamma) \\ -a(\alpha+\beta) & 0 & c(\beta+\gamma) \\ -b(\alpha+\gamma) & -c(\beta+\gamma) & 0 \end{pmatrix} = 0$ da cui segue che $a = b = c = 0$. Dunque $X' = 0$ e di conseguenza anche $X = 0$, per cui $\operatorname{Ker} f_B = \{0\}$.

Esercizio 2.
Poiché f è una isometria inversa, per il Teorema di classificazione delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ f può essere solo una riflessione o una riflessione traslatoria o una riflessione rotatoria. Rispettivamente il luogo dei punti fissi sarebbe un piano, l'insieme vuoto o un punto. Nelle ipotesi dell'esercizio necessariamente $Fix(f)$ è allora un punto e quindi f è una riflessione rotatoria.

Ricordiamo che la composizione di una riflessione e di una traslazione è una riflessione o una riflessione traslatoria.

Se H_1 e H_2 fossero paralleli, allora $r_1 \circ r_2$ sarebbe una traslazione e dunque f sarebbe una riflessione o una riflessione traslatoria; ciò è impossibile visto che $Fix(f)$ è un punto. Sia dunque s la retta intersezione di H_1 e H_2.

Se s fosse contenuta in H_3, allora s sarebbe contenuta in $Fix(r_1) \cap Fix(r_2) \cap Fix(r_3) \subseteq Fix(f)$, il che è impossibile per quanto visto sopra.

Poiché $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = s \cap H_3$, per provare la tesi basta escludere che $s \cap H_3 = \emptyset$. Ricordiamo che per ogni piano L passante per la retta s esiste un piano L' passante per s tale che, dette ρ e ρ' le riflessioni rispetto ai piani L e L', si ha che $r_1 \circ r_2 = \rho' \circ \rho$.

Se $s \cap H_3$ fosse vuoto, la retta s sarebbe parallela al piano H_3. Detto L il piano passante per s e parallelo ad H_3, ragionando come sopra si può scrivere $f = \rho' \circ \rho \circ r_3$ con $Fix(\rho) = L$. Poiché ρ e r_3 sono riflessioni rispetto a piani paralleli, allora $\rho \circ r_3$ è una traslazione e dunque $f = \rho' \circ \rho \circ r_3$ sarebbe una riflessione o una riflessione traslatoria, ma ciò è impossibile come già visto sopra.

Soluzione alternativa. Osserviamo preliminarmente che è sufficiente dimostrare che $W_{H_1} \cap W_{H_2} \cap W_{H_3} = \{0\}$. Infatti, sotto questa ipotesi si ha $\dim W_{H_1} \cap W_{H_2} = 1$, per cui se $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ allora

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(W_{H_1} \cap W_{H_2}) + 1 = 4 \ ,$$

il che è assurdo. Ne segue che $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(W_{H_1} \cap W_{H_2}) = 1$, per cui $r = H_1 \cap H_2$ è una retta con giacitura $W_r = W_{H_1} \cap W_{H_2}$. Dunque $W_r \cap W_{H_3} = \{0\}$, e con ragionamento analogo a quello appena svolto si deduce che $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = r \cap H_3$ ha dimensione zero, come voluto.

Sia allora $\varphi_i \in O(3)$ la parte lineare di r_i per $i = 1, 2, 3$, e sia $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3$. Sia ora $p \in Fix(f) \neq \emptyset$. Allora $f(p + v) = p + v$ se e solo se $\varphi(v) = v$, per cui $Fix(f) = p + Fix(\varphi)$, e dunque $\dim Fix(\varphi) < 2$. Inoltre, poiché $\det \varphi_i = -1$ per ogni i, si ha $\det \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 = -1$. Mettendo insieme queste due informazioni si ottiene che per la forma normale dell'isometria lineare φ è data da

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

per qualche $\theta \in \mathbb{R}$. In particolare, $Fix(\varphi) = \{0\}$. Ma ovviamente $W_{H_1} \cap W_{H_2} \cap W_{H_3} \subseteq Fix(\varphi)$, e ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 3.

a) Sia $P = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. La distanza di P da r_1 coincide con la distanza di P dal punto P_1 ottenuto come intersezione di r_1 con il piano H_1 passante per P e ortogonale a r_1. Poiché r_1 è parallela al vettore $(1, 1, 0)$, H_1 ha equazione $x + y = a + b$. Da ciò si ricava che $P_1 = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 1)$.

Analogamente, poiché r_2 è parallela al vettore $(0, 1, 0)$, il piano H_2 passante per P e ortogonale a r_2 ha equazione $y = b$. Di conseguenza $P_2 = r_2 \cap H_2 = (1, b, -1)$.

Il punto P è equidistante dalle rette r_1 e r_2 se e solo se $\|P - P_1\|^2 = \|P - P_2\|^2$, ossia se e solo se $a^2 - b^2 + 2ab - 4a + 8c + 2 = 0$. Il luogo $\mathcal{C}$ è dunque la quadrica di equazione $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8z + 2 = 0$.

Con le usuali notazioni, la quadrica è associata alla matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $\operatorname{rk} Q = 4, \operatorname{rk} A = 2$. Inoltre A ha segnatura $(1, 1, 1)$ per cui $w(A) = 2$; invece Q ha segnatura$(2, 2, 0)$ per cui $w(Q) = 2$. Dalla quaterna di invarianti affini $(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} Q, w(A), w(Q))$ riconosciamo dunque che $\mathcal{C}$ è un paraboloide iperbolico (o sella) e che la sua forma canonica affine è la quadrica di equazione $z = x^2 - y^2$.

b) La quadrica $\mathcal{C}_h$ è associata alla matrice $Q_h = \begin{pmatrix} h & -1 & 0 & 2 \\ -1 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2h & 0 \\ 2 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}$. Come noto $\mathcal{C}_h$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ se e solo se $(\operatorname{rk} A_h, \operatorname{rk} Q_h, w(A_h), w(Q_h)) = (\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} Q, w(A), w(Q)) = (2, 4, 2, 2)$. Poiché $\det A_h = -2h(h^2 - 1)$ si deve dunque avere $h = 0$ o $h = 1$ o $h = -1$. Il valore $h = 0$ è certamente da scartare perché $\det Q_0 = 0$. D'altra parte sia per $h = 1$ che per $h = -1$ si verifica che $(\operatorname{rk} A_h, \operatorname{rk} Q_h, w(A_h), w(Q_h)) = (2, 4, 2, 2)$ e quindi per ciascuno di tali valori $\mathcal{C}_h$ è affinemente equivalente a $\mathcal{C}$.