Corso di Laurea in Informatica
Correzione della prova scritta di Calcolo Numerico

Compito 2
30/05/2018

*Esercizio* 1. 1. Si osserva che il metodo di Gauss-Seidel è convergente in quanto la matrice $A$ è a predominanza diagonale.

2. La matrice $N$ risulta

$$n_{i,j} = \begin{cases} 1/2 & \text{se } j = i+2 \text{ per } i = 1, \dots, n-2; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

cioè

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto $\|N\|_\infty = 1/2$, quindi

$$\|G\|_\infty = \|M^{-1}N\|_\infty \leq \|M^{-1}\|_\infty \|N\|_\infty \leq \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

3. Poichè $\boldsymbol{e}_k = G^k \boldsymbol{e}_0$, passando alle norme, utilizzando la compatibilità tra norma matricale e norma vettoriale e la submoltiplicatvità delle norme otteniamo

$$\frac{\|\boldsymbol{e}_k\|_\infty}{\|\boldsymbol{e}_0\|_\infty} \leq \|G\|_\infty^k \leq 3^{-k}.$$

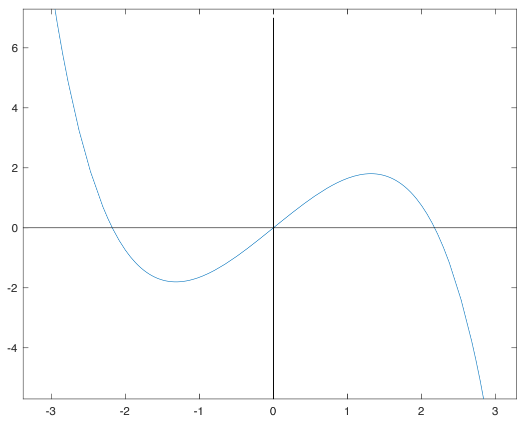
Quindi sono sufficienti $k = \lceil \frac{32}{\log_2(3)} \rceil = 21$ iterazioni.

4. Per chiarezza abbiamo inpmementato la funzione utilizzando due vettori distinti.

```
function [ x, k ] = inf_2018_05_30_1( b, tol, itmax )

n=length(b);
x0=zeros(n,1); %vettore di parteza
x1=zeros(n,1); %vettore che contiene l'iterata k-esima
errore=inf;
k=0;
while errore>tol && k<=itmax
        x1(1)=(b(1)+x0(3)/2)/2; % le prime e le ultime componenti
        x1(2)=(b(2)+x0(4)/2)/2; % vanno aggiornate in modo diverso
        for i=3:n-2
                x1(i)=(b(i)+x1(i-2)/2+x0(i+2)/2)/2;
        end
        x1(n-1)=(b(n-1)+x1(n-3)/2)/2;
        x1(n)=(b(n)+x1(n-2)/2)/2;
        errore=norm(x0-x1, 'inf');
        k=k+1;
        x0=x1;
end
x=x1;
end
```

La funzione richede $12 + 4(n-2)$ operazioni aritmetiche ad ogni iterazione.




*Esercizio 2.* 1. $f(x)$ è definita su tutto l'asse reale e abbiamo $f(-x) = -4x + e^x - e^{-x} = -(4x - e^x + e^{-x}) = -f(x)$. Da questo segue che $f(0) = -f(0)$ che è verificata se solo se $f(0) = 0$.

2. La derivata risulta $f'(x) = 4 - e^{-x} - e^x$. Facendo la sostituzione $t = e^x$ ottenuamo che i punti stazionari devono soddisfare la seguente equazione in $t$ ($t \neq 0$ sempre), $4 - \frac{1}{t} - t = 0$, cioè $t^2 - 4t + 1 = 0$ che è verificata per $t = 2 \pm \sqrt{3}$. Otteniamo quindi i punti stazionari $x_m = \log(2 - \sqrt{3}) \approx -1.32$ e $x_M = \log(2 + \sqrt{3}) = -x_m$, da cui abbiamo che la funzione è crescente tra $x_m$ e $x_M$, decrescente altrove. Poichè $f(x_M) > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ e la funzione è decrescente per $x > x_M$ abbiamo una sola soluzione $\alpha > x_M$. Nell'intervallo $(x_m, x_M)$ abbiamo la sola soluzione 0 e per simmetria abbiamo la soluzione $\beta = -\alpha$ con $\beta < x_m$.

   La derivata seconda $f''(x) = e^{-x} - e^x$ si annulla solo in $x = 0$ ed $f''(x) < 0$ per $x > 0$ e $f''(x) > 0$ per $x < 0$.

   Il grafico è mostrato in figura.

3. Per $x \in S = [\alpha, \infty)$ la convergenza è assicurata dal teorema di convergenza in grande. Infatti per ogni $x \in S$ abbiamo che $f'(x) \neq 0$, e $f(x)f''(x) > 0$ per $x \in S$. La convergenza è inoltre monotona decrescente. L'ordine di convergenza è 2.

4. Si nota che abbiamo convergenza ad $\alpha$ anche partenda da un qualsiasi $x_0 > x_M$ in quanto $x_1$ risulterà maggiore di $\alpha$. Non abbiamo invece convergenza ad $\alpha$ partendo da un $x_0 \in [0, x_M)$, tale intervallo contiene un sottointervallo convergente alla soluzione 0, ma non ad $\alpha$. Il metodo delle tangenti non può essere inoltre applicato partendo da $x_0 = x_M$ perchè non definito.

5.

```
function [ x, k ] = inf_2018_05_30_2( tol, x0 )
f=@(x) 4*x+exp(-x)-exp(x);
f1=@(x) 4-exp(-x)-exp(x);
errore=inf;
k=0;
while errore>tol
       x1=x0-f(x0)/f1(x0);
       errore=abs(x1-x0);
       k=k+1;
       x0=x1;
end
x=x1;

end
```