

CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2017/2018 – Prova Scritta 30/05/2018

NOME

COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1 Si consideri l'equazione

$$f(x) = 4x + e^{-x} - e^x = 0.$$

1. Si mostri che $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = -f(-x)$. Se ne deduca che $f(0) = 0$.
2. Si dimostri che l'equazione ha una sola soluzione reale positiva denotata con α .
3. Si dimostri che il metodo delle tangenti applicato alla funzione $f(x)$ genera successioni convergenti ad α per ogni punto iniziale $x_0 \geq \alpha$.
4. Si dica se il metodo delle tangenti applicato alla funzione $f(x)$ genera successioni convergenti ad α per ogni punto iniziale $x_0 \geq 0$.
5. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $tol \in \mathbb{R}$ e x_0 genera la successione generata dal metodo delle tangenti applicato alla funzione $f(x)$ a partire da x_0 arrestandosi quando $|x_k - x_{k-1}| \leq tol$ e restituendo in uscita la coppia (x_k, k) .

Esercizio 2 Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 3$, la matrice definita da

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j; \\ -1/2 & \text{se } j = i + 2 \text{ o } j = i - 2; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato ad A risulta convergente.
2. Sia $G = M^{-1}N$ la matrice di iterazione del metodo. Noto che $\|M\|_\infty \leq 2/3$ mostrare che $\|G\|_\infty \leq 1/3$.
3. Determinare quindi un numero di iterazioni k sufficienti a garantire

$$\frac{\|e_k\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} \leq 2^{-32},$$

con $e_k = x_k - \hat{x}$ e \hat{x} soluzione del sistema lineare $Ax = b$.

4. Si scriva un programma MatLab che dato in input $b \in \mathbb{R}^n$, $tol \in \mathbb{R}$ e $itmax \in \mathbb{N}$ implementa il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ con vettore iniziale nullo arrestandosi quando $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty \leq tol$ o $k \geq itmax$. Il programma deve restituire $x^{(k+1)}$ e k , avere costo lineare per iterazione e non richiedere la memorizzazione della matrice.