
Cognome

Nome

Matricola

Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
30/05/2018

Esercizio 1. Si consideri l'equazione

$$f(x) = 2x - 1 - \sin(x) = 0$$

1. Si mostri che l'equazione ammette una sola soluzione reale denotata con α . Si mostri che $\alpha \in [1/2, 1]$.
2. Si studi il condizionamento del calcolo di $g(x) = \frac{1 + \sin(x)}{2}$ per $x \in [1/2, 1]$ mostrando che vale $|c_x| < 1$.
3. Si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$. Si mostri che α è punto fisso di $g(x)$ e che il metodo iterativo genera successioni convergenti ad α per ogni scelta del punto iniziale.
4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input x_0 genera la successione generata dal metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da x_0 arrestandosi quando $|x_k - x_{k-1}| \leq \mathbf{eps}$ e restituendo in uscita la coppia (x_k, k) .

Esercizio 2. Sia $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ la matrice definita da

$$A = \begin{bmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & U \end{bmatrix},$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, I_n è la matrice identità di dimensione n e U è una matrice bidiagonale di dimensione n

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & & & \\ & \alpha & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \\ & & & & \alpha \end{bmatrix}.$$

1. Si dica, motivando la risposta, per quali valori del parametro reale α la matrice è a predominanza diagonale.
2. Si dica se per tali valori la matrice è fattorizzabile LU e si determinino tali fattori.
3. Si trovino tutti i valori di α per cui il metodo di Gauss-Seidel è convergente.
4. Si scriva una funzione Matlab che presi in ingresso $\alpha \in \mathbb{R}$, il vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2n}$ e $tol \in \mathbb{R}$ implementa il metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con un vettore iniziale nullo arrestandosi quando $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty \leq tol$ o quando sono state eseguite 1000 iterazioni. Il programma deve restituire $\mathbf{x}^{(k+1)}$ e k , avere costo al più lineare e non richiedere la memorizzazione della matrice. Per $\alpha = 3$, $n = 50$, $tol \in \{10^{-8}, 10^{-12}, 10^{-14}\}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{ones}(100, 1)$ si riporti l'errore assoluto $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_\infty$ dove $\mathbf{x} = A \setminus \mathbf{b}$.