CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in Informatica

A.A. 2017/2018 – Correzione Prova Scritta del 13/06/2018

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Vale $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Inoltre $f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ e $f'(x) = 2 - \cos(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e dunque la funzione è monotona crescente. Segue che esiste unica la soluzione α dell'equazione $f(x) = 0$. Per la localizzazione si ha $f(1/2) = -\sin(1/2) < 0$ e $f(1) = 1 - \sin(1) > 0$.

2. Si ha $g(x) = (1 + \sin(x))/2$, $g'(x) = \cos(x)/2$ e quindi $|c_x| = |x||\cos(x)/(1 + \sin(x)|$. Per $x \in [1/2, 1]$ vale $0 \le \cos(x) \le 1 \le 1 + \sin(x)$ da cui $|c_x| \le 1$. Se ne deduce che il calcolo di $g(x)$ per $x \in [1/2, 1]$ è ben condizionato.

3. Si ha $g(\alpha) = \alpha \iff 2\alpha = 1 + \sin(\alpha) \iff f(\alpha) = 0$. Inoltre $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $|g'(x)| = |\cos(x)|/2 < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ da cui per il teorema del punto fisso si ha convergenza in qualsiasi intorno circolare $[\alpha - \rho, \alpha + \rho]$, $\rho > 0$.

4.
```
function [x,k] = prova(x)
err=inf; k=0;
while (err>eps)
    x1=(1+sin(x))/2;
    err=abs(x1-x);
    x=x1;
    k=k+1;
end
```

Esercizio 2

1. La condizione per la predominanza diagonale è $|\alpha| > 1$ per $n = 1$ e $|\alpha| > 2$ per $n > 1$.

2. Per tali valori di α le sottomatrici principali di testa di ordine $1, \dots, 2n - 1$ di A sono predominanti diagonali e quindi invertibili. Dal teorema di esistenza ed unicità segue quindi che esiste unica la fattorizzazione LU di A. Per il calcolo conviene partire dalla fattorizzazione (immediata!!!!) della matrice di ordine n e poi completare all'ordine $2n$. Si ottiene
$$A = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ (1/\alpha)I_n & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ 0_n & U + (1/\alpha)I_n \end{bmatrix}.$$

3. Per il metodo di Gauss-Seidel si trova
$$M = \begin{bmatrix} \alpha I_n & 0_n \\ I_n & \alpha I_n \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & U - \alpha I_n \end{bmatrix}.$$
Da
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (1/\alpha)I_n & 0_n \\ -(1/\alpha^2)I_n & (1/\alpha)I_n \end{bmatrix},$$

segue

$$P = M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0_n & (1/\alpha)I_n \\ 0_n & -(1/\alpha^2)I_n - (1/\alpha)(U - \alpha I_n) \end{bmatrix}.$$

Essendo $B = -(1/\alpha^2)I_n - (1/\alpha)(U - \alpha I_n)$ triangolare superiore con elementi diagonali uguali a $-(1/\alpha^2)$ si conclude che la condizione per la convergenza è $\rho(P) = 1/\alpha^2 < 1 \iff \alpha^2 > 1$.

4.
```
function[x1,it]=gs(alpha,b,tol)
n2=length(b);
n=n2/2; err=inf; it=0;
x0=zeros(n2,1); x1=zeros(n2,1);
while(err>tol & it<1000)
for k=1:n
   x1(k)=(x0(n+k)+b(k))/alpha;
end
for k=n+1:n2-1
   x1(k)=(x0(k+1)-x1(k-n)+b(k))/alpha;
end
x1(n2)=(b(n2)-x1(n))/alpha;
err=norm(x1-x0, 'inf');
it=it+1;
x0=x1;
end
```

Per l'errore si ricava $\epsilon(10^{-8}) = 1.46e-09$, $\epsilon(10^{-12}) = 1.58e-13$, $\epsilon(10^{-14}) = 2.49e-15$.