Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
4/07/2018

Si ricorda che le funzioni Matlab richieste negli esercizi devono essere trascritte sui fogli consegnati poiché non sarà scaricato alcun file Matlab dai computer sui quali operate.

*Esercizio* 1. Si consideri l'equazione

$$f(x) = x\sin(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

1. Si mostri che l'equazione ammette una sola soluzione reale denotata con $\alpha$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$.
2. Ponendo $\alpha = 2\beta$ e utilizzando le formule di duplicazione ($\sin(2\beta) = 2\sin(\beta)\cos(\beta)$ e $\cos(2\beta) = \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta)$) si mostri che vale $2\beta = \tan(\beta)$ e quindi $\alpha/2 = \arctan(\alpha)$.
3. Per approssimare $\alpha$ si consideri il metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k) = 2\arctan(x_k)$. Si analizzi la convergenza del metodo.
4. Scrivere una funzione Matlab che dati in input $x_0$ genera la successione generata dal metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da $x_0$ arrestandosi quando $|x_k - x_{k-1}| \leq 10\,$`eps` e restituendo in uscita la coppia $(x_k, k)$. Riportare il valore di $k$ e $x_k$ generato per $x_0 = \pi$.

*Esercizio* 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, e sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definita da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j,\ i = 1, 2, \ldots, n \\ \alpha & \text{se } j = i+1,\ i = 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Sfruttando i cerchi di Gerschgorin, si diano delle limitazioni inferiore e superiore degli autovalori di $B = A^T A$ al variare del parametro $\alpha$.
2. Indicati con $\lambda_i$ ,$i = 1, \ldots, n$ gli autovalori di $A^T A$, ordinati in modo crescente, si dica quanto vale il $\prod_{i=1,\ldots,n} \lambda_i$. Sfruttando le limitazioni superiori trovate precedentemente per $\lambda_i$, $i = 2, \ldots, n$, si dia una limitazione inferiore per $\lambda_1$. Si dia quindi una maggiorazione del numero di condizionamento $\mu_2(A)$
3. Si consideri il metodo iterativo definito da $M = A^T$ e $B = M - N$ per la risoluzione del sistema lineare $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Si dimostri che il metodo converge per ogni $0 < \alpha < 1$.
4. Si scriva una funzione Matlab che preso in ingresso $\alpha \in \mathbb{R}$, il vettore $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e $tol \in \mathbb{R}$ implementa il metodo precedente per la risoluzione del sistema lineare $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con un vettore iniziale nullo arrestandosi quando $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}\|_\infty \leq tol$ o quando sono state eseguite 1000 iterazioni. Il programma deve restituire $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ e $k$, avere costo al più lineare e non richiedere la memorizzazione della matrice. Per $\alpha = 1/2$, $n = 50$, $tol \in \{10^{-8}, 10^{-12}, 10^{-14}\}$ e `b=ones(50, 1)` si riporti l'errore assoluto $\|\boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}\|_\infty$ dove $\boldsymbol{x} = B\backslash\boldsymbol{b}$.