CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2017/2018 – Correzione Prova Scritta del 04/07/2018

NOME COGNOME MATRICOLA

Esercizio 1

1. Vale $f(0) = f(2\pi) = 0$. Inoltre $f'(x) = x\cos(x)$ da cui in $[0, 2\pi]$ $f'(x) \geq 0 \iff x \in [0, \pi/2] \cup [(3/2)\pi, 2\pi]$. Segue che esiste unica α radice dell'equazione in $(0, 2\pi)$ e $\alpha \in [\pi/2, \pi] \subset [\pi/2, (3/2)\pi]$.

2. Si ha
$$\begin{aligned}&2\beta\sin(2\beta) + \cos(2\beta) - 1 = 0 \to\\ &4\beta\sin(\beta)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) - \cos^2(\beta) - \sin^2(\beta) = 0 \to\\ &2\beta\sin(\beta)\cos(\beta) = \sin^2(\beta) \to\\ &2\beta = \tan(\beta),\end{aligned}$$
da cui essendo $\beta \in (0, \pi/2)$ si ha $\arctan(2\beta) = \beta$ ed equivalentemente $\arctan(\alpha) = \alpha/2$.

3. Si ha $g(x) = 2\arctan(x)$, $g'(x) = 2/(1 + x^2)$ e quindi $|g'(x)| = g'(x) < 1 \iff |x| > 1$. Poichè $\alpha > 1$ dal corollario del teorema del punto fisso segue la convergenza locale del metodo iterativo. Dal teorema del punto fisso segue la convergenza in qualsiasi intorno circolare di α di raggio $\rho < \alpha - 1$. Per la monotonia delle successioni generate si può dimostrare la convergenza per ogni $x_0 > 1$.

4.
```
function [x,k] = nlsolve(x0)
err=inf; k=0; tol=10*eps;
while (err>tol)
    x=2*atan(x0);
    err=abs(x-x0);
    x0=x;
    k=k+1;
end
```
Per $x_0 = \pi$ si ottiene $k = 29$ e $x = 2.3311$.

Esercizio 2

1. La matrice $B = A^T A$ è simmetrica e quindi gli autovalori sono reali. Dal teorema di Gerschgorin si ottiene che $\min\{1-\alpha, 1+\alpha^2-2\alpha\} \leq \lambda_i \leq \max\{1+\alpha, 1+\alpha^2+2\alpha\}$. Poichè per $0 \leq \alpha \leq 1$ vale $1 + \alpha^2 - 2\alpha = (1 - \alpha)^2 \leq 1 - \alpha$ e $1 + \alpha^2 + 2\alpha = (1 + \alpha)^2 \geq 1 + \alpha$ si conclude che $(1 - \alpha)^2 \leq \lambda_i \leq (1 + \alpha)^2$.

2. Si ha $\prod_i \lambda_i = \det(B) = \det(A^T)\det(A) = 1$ da cui $\lambda_1 = 1/(\prod_{i>1} \lambda_i) \geq 1/(1 + \alpha)^{2(n-1)}$. Segue che $\mu_2(A) = \lambda_n/\lambda_1 \leq (1 + \alpha)^{2n}$ e quindi per $0 \leq \alpha \leq 1$ $\mu_2(A) \leq 2^{2n}$.

3. Si ottiene $M = A^T$ e $N = A^T(I_n - A)$ da cui $P = M^{-1}N = I_n - A$. La matrice di iterazione risulta pertanto triangolare superiore con elementi nulli sulla diagonale principale. Ne consegue che $\rho(P) = 0$ e quindi il metodi è convergente in un numero finito ($\leq n$) di passi per ogni valore di α.

4.
```
function[x1,it]=lsolve(alpha,b,tol)
n=length(b); err=inf; it=0;
x0=zeros(n2,1); x1=zeros(n2,1); q=zeros(n,1);
q(1)=b(1);
for j=2:n
  q(j)=b(j)-alpha*q(j-1);
end
while(err>tol & it<1000)
for j=1:n-1
   x1(j)=q(j)-alpha*x0(j-1);
end
x1(n)=q(n);
err=norm(x1-x0, 'inf');
it=it+1;
x0=x1;
end
```

Per l'errore si ricava $\epsilon(10^{-8}) = 4.67e - 09$ ($it = 27$), $\epsilon(10^{-12}) = 3.03e - 13$ ($it = 41$), $\epsilon(10^{-14}) = 4.66e - 15$ ($it = 47$).