CALCOLO NUMERICO
Corso di Laurea in Informatica
A.A. 2017/2018 – Correzione Prova Scritta del 06/09/2018

Esercizio 1

1. Si ha
$$|c_\alpha| = \left| -\frac{\alpha^2}{\sqrt{1+\alpha^2}(1-\sqrt{1+\alpha^2})} \right| = \frac{1+\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}},$$
da cui $|c_\alpha| \leq 2$ e quindi il calcolo è ben condizionato.

2. L'equazione $f(t) = 0$ ha radici $\gamma = g(x) = 1 - \sqrt{1+\alpha^2}$ e $\beta = 1 + \sqrt{1+\alpha^2}$. Le radici sono reali e distinte con $\gamma < \beta$. Dal teorema di convergenza in grande segue che il metodo delle tangenti genera successioni convergenti ad γ per punti inziali $t_0 \leq \gamma$. Per punti iniziali $\gamma < t_0 < 1$ si mostra che $t_1 \leq \gamma$. Analogamente se $t_0 > 1$ la successione generata converge a β. Per $t_0 = 1$ il metodo non è definito. Si conclude che si ha convergenza a γ per tutti e solo i punti iniziali che soddisfano $t_0 < 1$.

3. ```
function [k, t0] = myfunaa(x)
tol=10*eps;
x=x*x;
f=@(t)t^2--2*t-x;
f1=@(t)2*t-2;
%g=1-sqrt(1+x);
t0=0;
err=abs(f(t0));
k=0;
while(err>tol)
    t0=t0-f(t0)/f1(t0);
    err=abs(f(t0));
    k=k+1;
%   abs(t0-g)
end
```

**Esercizio 2**

1. Il primo passo del metodo di eliminazione gaussiana applicato ad $A_n$ riduce la matrice nella forma $A_n^{(1)}$ con $A_n^{(1)}(2\colon n, 2\colon n) = A_{n-1}$. La proprietà si applica dunque anche ai successivi passi del metodo. Si ottiene pertanto che il metodo è applicabile, la fattorizzazione esiste ed inoltre $L = (l_{i,j})$ è bidiagonale con elementi sottodiagonali tali che $l_{i+1,i} = -1$ per $1 \leq i \leq n-1$. Per la matrice $U = (u_{i,j})$ si ricava che $r_{k,j} = 1$ per $k \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$.

2. Segue che $A_n$ è invertibile e $\det(A_n) = 1$. Analogo risultato si ricava mediante lo sviluppo di Laplace secondo l'ultima colonna di $A_n$. In questo modo è anche possibile mostrare che le sottomatrici principali di testa di $A_n$ sono invertibili e quindi ricavare alternativamente l'esistenza e l'unicità della fattorizzazione $LU$ di $A_n$.
```

3. Per i valori di $s(n) = \dfrac{\mathcal{K}_\infty(A_n)}{\det(A_n)}$ e $p(n) = \dfrac{\mathcal{K}_\infty(A_n)}{n^2}$ si ottiene $s(100) = 10000$ e $p(100) = 1$; $s(200) = 40000$ e $p(200) = 1$; $s(400) = 160000$ e $p(400) = 1$; $s(800) = 640000$ e $p(800) = 1$.