

Analisi Matematica A-B

A.A. 2018-2019

E.Chiodaroli, C.Grisanti, V.M. Tortorelli

II settimana, 24-30 settembre 2018: primo foglio di esercizi

LEGENDA

I principali testi e raccolte di esercizi a cui si fa riferimento in queste note sono:

[GGS]	M.Ghisi, M. Gobbino, “Schede di Analisi Matematica”
[GGE]	M.Ghisi, M. Gobbino, “Schede di Analisi Matematica”
[FM]	A.Faedo, L.Modica, “Analisi I, lezioni”
[MS]	P.Marcellini, C. Sbordone, “Elementi di Analisi Matematica uno”
[ABC]	E.Acerbi, G. Buttazzo, “Analisi Matematica ABC 1: funzioni di una variabile”

Con:

- * si indicano gli esercizi più impegnativi,
- o quelli di approfondimento o estensione e quelli più teorici.

Altri esercizi sono nelle raccolte di testi di esame degli anni passati reperibili in
<http://pagine.dm.unipi.it/grisanti/didattica/compiti-desame/analisi-matematica/informatica/>

II GRUPPO DI ESERCITAZIONE: somme in progressione geometrica,
allineamenti decimali, *estremo superiore ed estremo inferiore*.

Teoria relativa nei testi indicati e svolta a lezione

CONFRONTO TRA DEFINIZIONI

estremo inferiore m

di un sottoinsieme A di \mathbf{R}

estremo superiore M

di un sottoinsieme A di \mathbf{R}

1) per ogni a in A

$$m \leq a$$

$$a \leq M$$

2) per ogni x in \mathbf{R}

se

per ogni a in A

$$x \leq a$$

allora

$$x \leq m$$

$$a \leq x$$

allora

$$M \leq x$$

ovvero a parole

m è il *massimo* tra i
minoranti di A

M è il *minimo* tra i
maggioranti di A .

ESERCIZIO n. 1 Quali sono gli estremi superiori dei seguenti insiemi:

$$\left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\left\{ \frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbf{R}, x > 1 \right\}, \left\{ \frac{n+1}{n-1} : n \in \mathbf{N}, n > 1 \right\},$$

$$\left\{ \frac{x-1}{x+1} : x \in \mathbf{R}, x > 1 \right\}, \left\{ \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbf{N}, n > 1 \right\},$$

$$* \left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbf{N} \right\},$$

$$* \left\{ \frac{n}{m} : m, n \in \mathbf{N}, n^2 \leq 3m^2 \right\}.$$

ESERCIZIO n.2 Quali sono valori di massimo tra gli estremi superiori trovati nel precedente esercizio?

ESERCIZIO n.3 a) Quali sono gli estremi inferiori dei seguenti insiemi:

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \right\}, \left\{ \frac{x+1}{x-1} : x \in \mathbf{R}, x > 1 \right\},$$

$$\{x \in [2; 7] : \sin x = 0\}, \{x \in [0; 1] : x^2 - x + 1 \geq 0\}.$$

b) Quali sono minimi?

o COMPLEMENTI: dalla *completezza* di \mathbf{R} (o meglio dall'esistenza dell'estremo superiore di un sottoinsieme di \mathbf{R} limitato non vuoto) si ottiene la seguente intuitiva proprietà, detta di *Archimede*, del sistema dei numeri reali:

$$\text{per ogni } x \in \mathbf{R} \text{ vi è } n \in \mathbf{N} \text{ per cui } n \geq x$$

in altre parole \mathbf{N} è *illimitato superiormente* in \mathbf{R} .

Per dedurlo sui ragiona come segue: se \mathbf{N} fosse limitato superiormente esisterebbe $a := \sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$.

In particolare $a \geq n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, quindi a sarebbe maggiore anche di tutti i numeri pari:
 $a \geq 2m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.

Quindi $\frac{a}{2} \geq m$ per ogni $m \in \mathbf{N}$.

ma ciò non è possibile poichè essendo $a = \sup \mathbf{N}$ è il più piccolo dei "maggioranti" di \mathbf{N} .

o ESERCIZIO n. 4 Si provi che $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbf{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ (che è la definizione di $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$).

ESERCIZIO n. 5 Si verifichi che $1 + a + a^2 \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, $a \neq 1$

o ESERCIZIO n. 6 a) Osservando che se $x \geq 1$ allora $2x \geq x + 1$ si provi: $2^n \geq n$
[Suggerimento $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \geq \dots$].

b) Si provi che $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

c)* Analogamente si provi che se $|a| < 1$ allora $a^n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

ESERCIZIO n. 7 a) Si calcoli l'estremo superiore $\sup\{1 + a + \dots + a^n : n \in \mathbf{N}\}$ fissato $a \in]0; 1[$.

b)* Si calcoli l'estremo inferiore $\inf\{1 - a + a^2 - a^3 \dots + (-1)^n a^n : n \in \mathbf{N}\}$ fissato $a \in]0; 1[$.

c) Mostrare che se $|a| < 1$: $1 + a + a^2 \dots + a^n - \frac{1}{1 - a} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$

[Osservazione: ciò si scrive usualmente come "somma infinita" $1 + a + a^2 \dots + a^n + \dots = \frac{1}{1 - a}$].

ESERCIZIO n. 9

a) Si provi che $0,\bar{9} = 1$.

b) Si provi che $0,\overline{001} = \frac{1}{99}$

c) A che frazione sarà quindi uguale $0,\overline{0 \dots 01}$ con 0 ripetuto nel periodo k volte?
