Logica per la Programmazione
Corso di Laurea in INFORMATICA
a.a. 2018/19

Andrea Corradini e Filippo Bonchi

Dipartimento di Informatica
E-mail: andrea@di.unipi.it, filippo.bonchi@unipi.it

Informazioni Utili

- Docente: **Filippo Bonchi** `filippo.bonchi@unipi.it`
- Esercitazioni: **Laura Semini** + **Lucia Nasti** + Filippo Bonchi
- Orario Lezioni: MER 14-16 - GIO 11-13, Aula E
- Ricevimento studenti: **Giovedi', 14-16** [e su appuntamento]
- Pagina web del corso: Moodle su elearning.di.unipi.it
  `https://elearning.di.unipi.it/course/view.php?id=128`
- Materiale didattico: dispense scaricabili dalla pagina web
- Occorre superare 25 CFU (almeno 12 CFU INF/01, e almeno 9 CFU MAT/* o FIS/*) entro settembre per passare al secondo anno
- **LPP (6 CFU) è un corso INF/01**

La Logica

- La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

> *"Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo..."* Aristotele

- Esempio di *sillogismo*
  - Tutti gli uomini sono mortali
  - Socrate è un uomo
  - Socrate è mortale

La Logica (cont.)

Non tutti i sillogismi sono validi:

- Tutti gli animali sono mortali
- Pippo è mortale
- Pippo è un animale

- Tutti gli dei sono immortali
- Gli uomini non sono dei
- Gi uomini sono mortali

Dalla Logica alla Matematica

- Nella seconda metà del XIX vengono sviluppate notazioni matematiche (algebriche) per trattare le operazioni della logica (George Boole, Augustus de Morgan, ...)
- Questo ha consentito di applicare la logica ai fondamenti della matematica, arrivando a interessanti controversie fondazionali: Russel, Gödel, Turing
- In matematica, la logica è usata, tra l'altro, per
  - esprimere asserti in modo non ambiguo
    Esempio: *tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi*

$$(\forall n.\ n \in N \ \wedge \ pari(n) \ \wedge \ n > 2 \ \Rightarrow \ \neg primo(n))$$

  - chiarire e formalizzare il concetto di dimostrazione

Logica Matematica e Informatica

- La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
  - l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM (P=NP è uno dei cinque Millennium problems)
  - la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica (Isomorfismo di Curry-Howard: dimostrazioni e programmi)
- Usi della Logica Matematica in Informatica:
  - formalizzazione di requisiti
  - dimostrazione di proprietà di programmi (es: logica di Hoare)
  - programmazione dichiarativa (PROLOG)
  - programmazione funzionale e teoria dei tipi (Haskell, CAML)
  - rappresentazione della conoscenza (Intelligenza Artificiale)
  - strumenti di analisi e di verifica di sistemi
    - Model checking (SPIN, PRISM)
    - Proof assistants (COQ, Isabelle)

Contenuti del Corso

- Introduzione (già fatta!)
- Calcolo Proposizionale
  - Connettivi logici e loro proprietà
  - Tautologie, tecniche di dimostrazione
- Logica del Primo Ordine
  - Sintassi e semantica
  - Leggi e regole di inferenza per i quantificatori
  - Esempi da teoria degli insiemi e dominio dei naturali
- Quantificatori funzionali
  - min, max, cardinalità, sommatoria: leggi e dimostrazioni
- Triple di Hoare
  http://it.wikipedia.org/wiki/Tony_Hoare
  - Un semplice linguaggio imperativo, semantica operazionale
  - Verifica di proprietà di semplici programmi

Un Problema di Deduzione Logica [da un test di ingresso]

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- Il giorno successivo, quali dei seguenti fatti possiamo affermare con certezza?
  1. Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2. Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3. Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4. Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

Il Calcolo Proposizionale

- È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- Una proposizione è un enunciato dichiarativo (per esempio una frase in linguaggio naturale) che "afferma qualcosa" e per il quale si può dire:

Principio del terzo escluso:
che è vero oppure è falso (non ci sono altre possibilità)

Principio di non contraddittorietà:
che non è al tempo stesso sia vero che falso.

"dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa" Aristotele

Esempi di Proposizioni “Atomiche”

1. Roma è la capitale d’Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3. $1+1 = 2$
4. $2+2 = 3$

Esempi di Non Proposizioni

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3. $x+1 = 2$

Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p *allora* q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p *se e solo se* q	$p \equiv q$	*equivalenza*
p *se* q	$p \Leftarrow q$	*conseguenza*

Sintassi delle Proposizioni (Grammatica)

$$
\begin{array}{lll}
\mathit{Prop} & ::= & \\
& & (\mathit{Prop} \equiv \mathit{Prop}) \mid (\mathit{Prop} \wedge \mathit{Prop}) \mid (\mathit{Prop} \vee \mathit{Prop}) \mid \\
& & (\mathit{Prop} \Rightarrow \mathit{Prop}) \mid (\mathit{Prop} \ \Leftarrow \ \mathit{Prop}) \mid (\neg \mathit{Prop}) \mid \\
& & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \\
& & p \mid q \mid \ \ldots
\end{array}
$$

Semantica (significato) delle Proposizioni

Tabelle di verità dei connettivi logici:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio

- Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - Introduciamo tre proposizioni:
    - $A \equiv$ "Antonio va al cinema"
    - $B \equiv$ "Bruno va al cinema"
    - $C \equiv$ "Corrado va al cinema"
- Si sa che:
  - Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - $C \Rightarrow A$
- Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
    - $A \Rightarrow B$

Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio (cont.)

- Il giorno successivo, quali dei seguenti fatti possiamo affermare con certezza?
  - Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - $C \Rightarrow B$
  - Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
  - Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - $B \Rightarrow C$
  - Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - $\neg C \Rightarrow \neg B$
- Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti

Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- Piove e fa molto freddo
  P $\equiv$ "piove", R $\equiv$ "fa freddo" $[P \wedge R]$
- Fa freddo, ma non piove
  $[R \wedge \neg P]$
- Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove
  N $\equiv$ "ci sono nuvole", V $\equiv$ "c'è vento" $[(N \wedge \neg V) \Rightarrow P]$
- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre
  Ne $\equiv$ "nevica", C $\equiv$ "ci si copre" $[Ne \wedge (\neg R \Leftarrow C)]$
- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica
  $[C \Rightarrow (R \vee Ne)]$
- Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento
  $[P \Rightarrow (N \wedge \neg V)]$

Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- Se P allora Q $[P \Rightarrow Q]$
- P è una conseguenza di Q $[Q \Rightarrow P]$
- P è condizione necessaria e sufficiente per Q $[P \equiv Q]$
- P è condizione necessaria per Q $[Q \Rightarrow P]$
- P è condizione sufficiente per Q $[P \Rightarrow Q]$
- P vale solo se vale Q $[P \Rightarrow Q]$
- P vale se vale Q $[Q \Rightarrow P]$
- P vale se e solo se vale Q $[P \equiv Q]$
- Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno $[A \Rightarrow B]$

Tautologie e Contraddizioni

- Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
  - Esempio: $P \vee \neg P$ (vedi tabella di verità)
- Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- Quindi **P** è una tautologia se e solo se $\neg$**P** è una contraddizione

Implicazioni e Equivalenze Tautologiche

- Diciamo che

  p implica tautologicamente q
  se e solo se
  $p \Rightarrow q$ è una tautologia

  p è tautologicamente equivalente a q
  se e solo se
  $p \equiv q$ è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?

Dimostrazione di Tautologie

- Per dimostrare che p è una tautologia possiamo
  - Usare le tabelle di verità
    - Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in p
- Cercare di costruire una dimostrazione
  - Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
  - Usando opportune regole di *inferenza*
  - Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
- Mostrare che non è una tautologia
  - individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa p

Riflessioni per casa

Ripensiamo ad Antonio, Bruno e Corrado:

- Sappiamo che $(C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)$
- e ci chiediamo quali tra le seguenti formule ne sia *conseguenza logica*: $C \Rightarrow B$, $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$, $B \Rightarrow C$, $\neg C \Rightarrow \neg B$.
- A tal fine è sufficiente sapere se le seguenti siano tautologie o meno
  - $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow B)$
  - $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$
  - $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
  - $((C \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$
- Per ognuna delle formule precedenti, dare una dimostrazione attraverso tabelle di verità oppure mostrare un controesempio.