

Logica per la Programmazione

Lezione 2

- ▶ Dimostrazione di Tautologie
 - ▶ Tabelle di Verità
 - ▶ Dimostrazioni per sostituzione
 - ▶ Leggi del Calcolo Proporzionale

Dimostrazione di Tautologie

Abbiamo detto che: Per dimostrare che P è una tautologia possiamo:

- ▶ Usare le tabelle di verità, sfruttando quelle dei connettivi
 - ▶ Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in P
- ▶ Cercare di costruire una dimostrazione
 - ▶ Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
 - ▶ Usando opportune *regole di inferenza*
 - ▶ Si possono impostare vari tipi di dimostrazioni
- ▶ Mostrare che non è una tautologia
 - ▶ individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa P

Vediamo come si costruiscono le tabelle di verità

Interpretazione di una Formula Proporzionale

- ▶ **Interpretazione:** funzione da variabili proposizionali a $\{0, 1\}$
Nota: useremo F e T nelle formule, ma **0** e **1** per *falso* e *vero* nella semantica
- ▶ Esempio: \Rightarrow **LAVAGNA**
 - ▶ Formula $(P \wedge Q) \vee \neg R$
 - ▶ Interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 0, R \mapsto 0\}$
- ▶ Si può calcolare il valore di verità della formula nell'interpretazione usando le tavole di verità dei connettivi logici:

P	Q	R		$((P \wedge Q) \vee \neg R)$												
1	0	0		<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">(1)</td> <td style="padding: 5px;">(2)</td> <td style="padding: 5px;">(1)</td> <td style="padding: 5px;">(3)</td> <td style="padding: 5px;">(2)</td> <td style="padding: 5px;">(1)</td> </tr> </table>	1	0	0	1	1	0	(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)
1	0	0	1	1	0											
(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)											

P	Q		$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
1	1		0	1	1	1	1	1
1	0		0	0	1	0	0	1
0	1		1	0	1	1	0	0
0	0		1	0	0	1	1	1

Tabella di verità di una formula proposizionale

- ▶ La tabella di verità raccoglie tutte le possibili interpretazioni
- ▶ Un esempio: $((P \wedge Q) \vee \neg R)$

P	Q	R	$((P \wedge Q) \vee \neg R)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

(1)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)
-----	-----	-----	-----	-----	-----

Dimostrazione di Tautologie

Abbiamo detto che: Per dimostrare che P è una tautologia possiamo:

- ▶ Usare le tabelle di verità, sfruttando quelle dei connettivi
 - ▶ Del tutto meccanico, richiede di considerare 2^n casi, dove n è il numero di variabili proposizionali in P
- ▶ **Cercare di costruire una dimostrazione**
 - ▶ **Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)**
 - ▶ **Usando opportune regole di inferenza**
 - ▶ **Si possono impostare vari tipi di dimostrazioni**
- ▶ Mostrare che non è una tautologia
 - ▶ individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa P

Dimostrazioni per Sostituzione: cominciamo dall'Aritmetica

- Mostriamo che $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \Rightarrow$ LAVAGNA

$$(a + b)(a - b)$$

= (distributività $(x + y)z = xz + yz$) con sostituzione

$$\{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto (a - b)\}$$

$$\underline{a(a - b)} + \underline{b(a - b)}$$

= (distributività $x(y - z) = xy - xz$), due volte, la prima volta con sostituzione $\{x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto b\}$ e la seconda con

$$\{x \mapsto b, y \mapsto a, z \mapsto b\}$$

$$\underline{(aa - ab)} + \underline{(ba - bb)}$$

= (quadrato $xx = x^2$), due volte, e (associatività) della somma

$$\underline{a^2 - ab} + \underline{ba - b^2}$$

= (commutatività) del prodotto, e (differenza $-x + x = 0$)

$$\underline{a^2 + 0} - b^2$$

= (elemento neutro $x + 0 = x$)

$$a^2 - b^2$$

Struttura di una semplice Dimostrazione

Nella dimostrazione vista abbiamo

- ▶ una sequenza di eguaglianze
 - ▶ es: $a^2 + 0 - b^2 = a^2 - b^2$
- ▶ ogni eguaglianza ha come giustificazione una o più **leggi** (dell'aritmetica)
 - ▶ es: $x + 0 = x$
- ▶ La correttezza di ogni eguaglianza è basata su una **regola di inferenza**: **il principio di sostituzione**

Informalmente:

“Sostituendo eguali con eguali il valore non cambia”

- ▶ es: dalla legge sappiamo che $a^2 + 0 = a^2$ (scegli x uguale ad a^2)
- ▶ quindi per il principio di sostituzione abbiamo $a^2 + 0$ $- b^2 =$ a^2 $- b^2$

Principio di Sostituzione

- ▶ Esprime una proprietà fondamentale dell'**eguaglianza**.
- ▶ **“Se sappiamo che $A = B$, allora il valore di una espressione C in cui compare A non cambia se A è sostituito con B ”**

- ▶ in formule,

$$\frac{A = B}{C = C[B/A]}$$

- ▶ Qui $A = B$ è una legge, e $C = C[B/A]$ è l'eguaglianza da essa giustificata, grazie al principio di sostituzione
- ▶ Nel Calcolo Proposizionale esprime una proprietà dell'**equivalenza**:

$$\boxed{\frac{P \equiv Q}{R \equiv R[Q/P]}}$$

- ▶ A volte scriviamo R_P^Q per $R[Q/P]$

Leggi del Calcolo Proporzionale

- ▶ Una **legge** è una tautologia.
- ▶ Di solito una tautologia viene chiamata “legge” quando descrive una proprietà di uno o più connettivi logici, o quando è usata come giustificazione nelle dimostrazioni.
- ▶ Per ogni legge che introduciamo, bisognerebbe verificare che sia una tautologia
 - ▶ a volte è ovvio
 - ▶ a volte lo mostreremo con tabelle di verità
 - ▶ a volte presenteremo una dimostrazione in cui usiamo **solo leggi introdotte in precedenza**
 - ▶ spesso lo lasceremo come esercizio...

Leggi per l'Equivalenza

- ▶ $p \equiv p$ (Riflessività)
- ▶ $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (Simmetria)
- ▶ $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (Associatività)
- ▶ $(p \equiv \mathbf{T}) \equiv p$ (Unità)
- ▶ $(p \equiv q) \wedge (q \equiv r) \Rightarrow (p \equiv r)$ (Transitività)
- ▶ Esempio di dimostrazione: (Unità), (**Transitività**)

P	$(P \equiv \mathbf{T})$	\equiv	\mathbf{T}	\equiv	P
1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0
	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)

Leggi per Congiunzione e Disgiunzione

$p \vee q \equiv q \vee p$	(Commutatività)
$p \wedge q \equiv q \wedge p$	
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	(Associatività)
$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	
$p \vee p \equiv p$	(Idempotenza)
$p \wedge p \equiv p$	
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$	(Unità)
$p \vee \mathbf{F} \equiv p$	
$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	(Zero) (Dominanza)
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(Distributività)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	

- Esercizio: dimostrare alcune leggi con tabelle di verità

Dimostrazioni di Equivalenze Tautologiche

- ▶ Come per equazioni algebriche si può provare $\mathbf{P_1} \equiv \mathbf{P_n}$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P_1} \\ \equiv & \quad \{\text{giustificazione}\} \\ & P_2 \\ & \dots \\ \equiv & \quad \{\text{giustificazione}\} \\ & \mathbf{P_n} \end{aligned}$$

- ▶ dove ogni passo ha la seguente forma, in cui $P \equiv Q$ è una legge:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R} \\ \equiv & \quad \{P \equiv Q\} \\ & \mathbf{R[Q/P]} \end{aligned}$$

- ▶ Ogni passo è corretto per il *Principio di Sostituzione*

Una Semplice Dimostrazione \Rightarrow Lavagna

$$\begin{aligned}
 & \text{Teorema: } p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r) \\
 & (p \vee q) \vee (p \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(p \vee q) \equiv (q \vee p) \text{ (Commutatività)}\} \\
 & (q \vee p) \vee (p \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & q \vee (p \vee (p \vee r)) \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & q \vee ((p \vee p) \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(Idempotenza)\} \\
 & q \vee (p \vee r) \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & (q \vee p) \vee r \\
 \equiv & \quad \{(Commutatività)\} \\
 & (p \vee q) \vee r \\
 \equiv & \quad \{(Associatività)\} \\
 & p \vee (q \vee r)
 \end{aligned}$$

Commenti

- ▶ La dimostrazione fatta usando le leggi garantisce la correttezza della dimostrazione grazie al *Principio di Sostituzione*
- ▶ Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi
- ▶ Nel seguito semplificheremo le dimostrazioni, saltando passi ovvi come l'applicazione di Associatività, Commutatività e Idempotenza

Leggi della Negazione

$$\neg(\neg p) \equiv p \quad (\text{Doppia Negazione})$$

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T} \quad (\text{Terzo escluso})$$

$$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F} \quad (\text{Contraddizione})$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad (\text{De Morgan})$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg \mathbf{T} \equiv \mathbf{F} \quad (\mathbf{T}: \mathbf{F})$$

$$\neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{T} \quad (\mathbf{F}: \mathbf{T})$$

- Esercizio: dimostrare alcune leggi con tabelle di verità

Leggi di eliminazione

- ▶ $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$ (Elim- \Rightarrow)
- ▶ $\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$ (\neg - \Rightarrow)

- ▶ $(p \equiv q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ (Elim- \equiv)
- ▶ $(p \equiv q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ (Elim- \equiv -bis)

- ▶ $(p \Leftarrow q) \equiv (q \Rightarrow p)$ (Elim- \Leftarrow)

Sulle Leggi del Calcolo Proposizionale

- ▶ Abbiamo visto le leggi per l'equivalenza (\equiv), la congiunzione (\wedge), la disgiunzione (\vee), la negazione (\neg)
- ▶ Poi abbiamo visto le leggi per eliminare implicazione (\Rightarrow), conseguenza (\Leftarrow) ed equivalenza (\equiv)
- ▶ Si può mostrare che tutte le tautologie del Calcolo Proposizionale sono dimostrabili a partire dall'insieme delle leggi visto sinora
- ▶ Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre altre leggi che corrispondono, per esempio, ad assodate tecniche di dimostrazione