

# Logica per la Programmazione

## Lezione 4

- ▶ Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche
  - ▶ Principio di sostituzione per l'implicazione
  - ▶ Occorrenze positive e negative
  - ▶ Altre tecniche di dimostrazione
  - ▶ Forme Normali
- ▶ Insiemi funzionalmente completi di connettivi logici

## Tecniche di Dimostrazione di Equivalenze

- ▶ Abbiamo visto vari esempi di dimostrazioni per sostituzione, dove ogni passo era un'equivalenza:

- ▶ Per dimostrare che  $P \equiv Q$  possiamo partire da  $P$  e arrivare a  $Q$ :

$$P \equiv \dots \equiv Q$$

Oppure possiamo ridurre sia  $P$  che  $Q$  a una formula comune  $R$ :

$$P \equiv \dots \equiv R \qquad Q \equiv \dots \equiv R$$

- ▶ Per dimostrare che una formula proposizionale  $P$  (che non ha  $\equiv$  come connettivo principale) è una tautologia, possiamo mostrare che è equivalente a  $\mathbf{T}$ :

$$P \equiv \dots \equiv \mathbf{T}$$

## Verso dimostrazioni con implicazioni

Vediamo che se la formula è del tipo  $P \Rightarrow Q$ , allora si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$P \equiv \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \equiv Q$$

Introduciamo alcune leggi utili:

- ▶ Hanno un'implicazione come connettivo principale
- ▶ Usate come giustificazioni in prove di implicazioni
- ▶ *Diamo anche forma disambiguata con parentesi*

$$(P \Rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q \quad (\text{Modus Ponens}) \quad (((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q)$$

$$P \wedge Q \Rightarrow P \quad (\text{Sempl.- } \wedge) \quad ((P \wedge Q) \Rightarrow P)$$

$$P \Rightarrow P \vee Q \quad (\text{Intro.- } \vee) \quad (P \Rightarrow (P \vee Q))$$

Correttezza di Modus Ponens e di Sempl.- $\wedge$ 

	$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$	(Modus Ponens)
$\equiv$	$P \wedge (\neg P \vee Q) \Rightarrow Q$	{ (Elim.- $\Rightarrow$ ) }
$\equiv$	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	{ (Complemento) }
$\equiv$	$\neg(P \wedge Q) \vee Q$	{ (Elim.- $\Rightarrow$ ) }
$\equiv$	$\neg P \vee \neg Q \vee Q$	{ (De Morgan) }
$\equiv$	$\neg P \vee \neg Q \vee Q$	{ (Terzo Escluso), (Zero) }
<b>T</b>		

## Verso la Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche

- Posso impostare la dimostrazione che  $P_1 \Rightarrow P_k$

$P_1$	
$\equiv$	giustificazione
$\equiv$	...
$\equiv$	giustificazione
$\Rightarrow$	$P$
$\Rightarrow$	$\{P \Rightarrow Q\}$
$\equiv$	$Q$
$\equiv$	giustificazione
$\equiv$	...
$\equiv$	giustificazione
$P_k$	

## Esempio - Tollendo Ponens

- ▶ Usando la legge (Sempl.- $\wedge$ )  $P \wedge Q \Rightarrow P$  possiamo dimostrare

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q \quad (\text{Tollendo Ponens})$$

Partiamo dalla premessa dell'implicazione:

$$(P \vee Q) \wedge \neg P$$

$$\equiv \quad \{ (\text{Doppia Negazione}) \text{ e } (\text{Complemento}) \}$$

$$Q \wedge \neg P$$

$$\Rightarrow \quad \{ (\text{Sempl.-}\wedge) \}$$

$$Q$$

- ▶ Si noti che abbiamo applicato (Sempl.- $\wedge$ ) all'intera proposizione  $Q \wedge \neg P$

## Vale un Principio di Sostituzione per l'Implicazione?

- ▶ Il **principio di sostituzione per l'equivalenza** stabilisce che

“Se  $P \equiv Q$  , allora  $R \equiv R[Q/P]$ ”

$$\frac{P \equiv Q}{R \equiv R[Q/P]}$$

- ▶ È valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

“Se  $P \Rightarrow Q$  , allora  $R \Rightarrow R[Q/P]$ ” (???)

$$\frac{P \Rightarrow Q}{R \Rightarrow R[Q/P]} \quad (???)$$

- ▶ In generale **NO**. Infatti:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} U \wedge V \Rightarrow Z \\ U \Rightarrow Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \{(Sempl.-\wedge)\} \\ \\ NO!! \end{array}$$

$U$	$V$	$Z$	$(U \wedge V \Rightarrow Z) \Rightarrow (U \Rightarrow Z)$
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1

## Analogia con Disuguaglianze Algebriche

- ▶ Situazione analoga con disuguaglianze algebriche
- ▶ Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\leq \frac{a - c}{b - c} \quad \{a \leq b\}$$

OK

$$\leq \frac{a - c}{a - d} \quad \{c \leq d\}$$

NO!!!

$$\geq \frac{a - c}{a - d} \quad \{c \leq d\}$$

OK

- ▶ Si noti che **a** compare *positivamente* in (**a** - **c**), ma **c** vi compare *negativamente*. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.



## Occorrenze Positive e Negative

- ▶ Definizione: la formula proposizionale  $P$  **occorre positivamente** in

$$P \quad P \vee Q \quad P \wedge Q \quad Q \Rightarrow P$$

- ▶ mentre  $P$  **occorre negativamente** in

$$\neg P$$

$$P \Rightarrow Q \quad (\text{si ricordi che } P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q)$$

- ▶ Se  $P$  compare in una formula  $R$  a livello più profondo, si contano le occorrenze negative da  $P$  fino alla radice di  $R$ :
  - ▶ se sono pari, allora  $P$  **occorre positivamente** in  $R$
  - ▶ se sono dispari, allora  $P$  **occorre negativamente** in  $R$
- ▶ Attenzione: se  $P$  compare più volte in  $R$ , bisogna considerare separatamente le occorrenze: ognuna di esse può essere positiva o negativa indipendentemente dalle altre

## Esempi

Come occorrono  $P, Q, R$  in  $P \Rightarrow ((\neg R) \Rightarrow Q) ?$

Sottolineamo le occorrenze negative:  $\underline{P} \Rightarrow ((\neg \underline{R}) \Rightarrow Q)$

$P$  occorre **negativamente**,  $R$  occorre **positivamente**,  $Q$  occorre **positivamente**. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

$$\neg P \vee (R \vee Q)$$

Come occorrono  $P, R$  e  $Q$  in  $(P \Rightarrow (\neg R)) \Rightarrow Q ?$

$$(\underline{P} \Rightarrow (\neg \underline{R})) \Rightarrow Q$$

Sia  $P$  che  $R$  che  $Q$  compaiono **positivamente**. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

$$(P \wedge R) \vee Q$$

## Occorrenze Positive e Negative: Esempi

- ▶ Come occorre  $P$  nelle seguenti proposizioni?
  - ▶  $(P \wedge R) \vee S$
  - ▶  $Q \Rightarrow \neg(P \wedge R)$
  - ▶  $(\neg P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow S$
  - ▶  $\neg P \vee Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
  - ▶  $P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$
- ▶ Se ci sono più occorrenze di  $P$ , indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
  - ▶  $P \Rightarrow (Q \vee P \Rightarrow Q \vee \neg S)$
  - ▶  $P \Rightarrow (Q \vee P \Rightarrow Q \vee \neg S)$

## Principio di Sostituzione per l'Implicazione

Possiamo ora enunciare in modo corretto il **Principio di Sostituzione dell'Implicazione** che prevede due casi

- ▶ Se abbiamo stabilito che
  - ▶  $P \Rightarrow Q$
  - ▶  $P$  occorre **positivamente** in  $R$

allora vale

$$R \Rightarrow R[Q/P]$$

$P \Rightarrow Q,$ $P \text{ occorre positivamente in } R$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $R \Rightarrow R[Q/P]$
--

- ▶ Se abbiamo stabilito che
  - ▶  $P \Rightarrow Q$
  - ▶  $P$  occorre **negativamente** in  $R$

allora vale

$$R \Leftarrow R[Q/P]$$

$P \Rightarrow Q,$ $P \text{ occorre negativamente in } R$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $R \Leftarrow R[Q/P]$
---

## Dimostrazione di Implicazioni: esempi

- ▶  $(P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ , usando  $A \wedge B \Rightarrow A$  (Sempl.- $\wedge$ )

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \wedge R \\ \Rightarrow \quad \quad \quad \{(Sempl.-\wedge) \text{ e } Q \wedge R \text{ occorre posit.}\} \\ P \Rightarrow Q \end{array}$$

- ▶  $(P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

Partiamo dalla conseguenza, usando  $A \Rightarrow A \vee B$  (Intro.- $\vee$ )

$$\begin{array}{l} (P \Rightarrow R) \\ \Leftarrow \quad \quad \quad \{(Intro.-\vee) \text{ e } P \text{ occorre negat.}\} \\ P \vee Q \Rightarrow R \end{array}$$

## Forme Normali

- ▶ Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale*. Si considerano due tipi:

- ▶ Forma normale **coniuntiva**

$$(P_1 \vee P_2 \vee \dots) \wedge (Q_1 \vee Q_2 \vee \dots) \wedge \dots$$

- ▶ Forma normale **disgiuntiva**

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots) \vee (Q_1 \wedge Q_2 \wedge \dots) \vee \dots$$

dove  $P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots$  sono variabili proposizionali, *eventualmente negate*

- ▶ Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- ▶ Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività

## Il Principio di Risoluzione

- ▶  $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$  (Risoluzione)
- ▶ Questa legge permette di semplificare una formula in **forma normale congiuntiva**. È il meccanismo di calcolo alla base della **programmazione logica**.
- ▶ Vediamo tre diverse dimostrazioni: **LAVAGNA!**

$$\begin{array}{ll}
 (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) & \\
 \equiv & \{(\text{Elim.} \Rightarrow), 2 \text{ volte}\} \\
 (\neg Q \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow R) & \\
 \Rightarrow & \{(\text{Transitività} \Rightarrow)\} \\
 \neg Q \Rightarrow R & \\
 \equiv & \{(\text{Elim.} \Rightarrow)\} \\
 Q \vee R & 
 \end{array}$$

- ▶ Quindi la risoluzione corrisponde alla transitività dell'implicazione

## Altre dimostrazioni del Principio di Risoluzione

Vediamo una dimostrazione standard del Principio di Risoluzione, in cui partiamo dalla premessa e la semplifichiamo fino ad arrivare alla conseguenza.

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R) \text{ (Risoluzione)}$$

Partiamo quindi dalla premessa:

$$\begin{aligned} & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \\ \equiv & \quad \{(Distributività)\} \\ & ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\ \equiv & \quad \{(Complemento)\} \\ & (Q \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), (Q \wedge \neg P) \text{ occorre positivamente}\} \\ & Q \vee ((P \vee Q) \wedge R) \\ \Rightarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), ((P \vee Q) \wedge R) \text{ occorre positivamente}\} \\ & Q \vee R \end{aligned}$$



## Altre dimostrazioni del Principio di Risoluzione

Ora dimostriamo la stessa formula riducendola a **T**, usando gli stessi passaggi della dimostrazione precedente. Si noti il verso delle implicazioni.

$$\begin{aligned}
 & (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R) && \equiv PR \\
 \equiv & \quad \{(Distributività)\} \\
 & ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \equiv & \quad \{(Complemento)\} \\
 & (Q \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \Leftarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), (Q \wedge \neg P) \text{ occorre negativamente}\} \\
 & Q \vee ((P \vee Q) \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \Leftarrow & \quad \{(Sempl-\wedge), ((P \vee Q) \wedge R) \text{ occorre negativamente}\} \\
 & Q \vee R \Rightarrow (Q \vee R) \\
 \equiv & \quad \{(Riflessività-\Rightarrow)\} \\
 & \mathbf{T}
 \end{aligned}$$

Si noti che abbiamo dimostrato che  $\mathbf{T} \Rightarrow PR$ . Poichè  $PR \Rightarrow \mathbf{T}$  è banalmente vero, questo è sufficiente per mostrare che  $PR$  è una tautologia.

## Insiemi Funzionalmente Completi di Connettivi Logici

- ▶ Abbiamo introdotto 6 diversi connettivi logici:

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
<i>not</i>	$\neg p$	<i>negazione</i>
<i>and, e</i>	$p \wedge q$	<i>coniunzione</i>
<i>or, o</i>	$p \vee q$	<i>disgiunzione</i>
<i>se p allora q</i>	$p \Rightarrow q$	<i>implicazione</i>
<i>p se e solo se q</i>	$p \equiv q$	<i>equivalenza</i>
<i>p se q</i>	$p \Leftarrow q$	<i>conseguenza</i>

- ▶ Alcuni possono essere definiti in termini di altri.
- ▶ Molti sottoinsiemi sono “funzionalmente completi” cioè permettono di derivare tutti gli altri.
- ▶ Vediamo che  $\{\wedge, \neg\}$  è funzionalmente completo.
- ▶ Esercizio: dimostrare che anche  $\{\vee, \neg\}$  e  $\{\Rightarrow, \neg\}$  sono funzionalmente completi.

## L'Insieme $\{\wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo

- ▶ Occorre mostrare che una qualunque formula proposizionale è equivalente a una formula che contiene solo  $\{\wedge, \neg\}$ .
- ▶ Per **induzione strutturale** sulla sintassi delle formule
  - ▶ Ricordiamo la sintassi:

*Prop* ::=

$(Prop \equiv Prop) \mid (Prop \wedge Prop) \mid (Prop \vee Prop) \mid$   
 $(Prop \Rightarrow Prop) \mid (Prop \Leftarrow Prop) \mid (\neg Prop) \mid$   
**T** | **F** |  
 $p \mid q \mid \dots$

- ▶ implicazione ( $\Rightarrow$ ), conseguenza ( $\Leftarrow$ ) ed equivalenza ( $\equiv$ ): facile!
- ▶ **disgiunzione:**

$$\begin{aligned}
 & p \vee q \\
 \equiv & \quad \quad \quad \{(Doppia Neg.)\} \\
 & \neg\neg(p \vee q) \\
 \equiv & \quad \quad \quad \{(De Morgan)\} \\
 & \neg(\neg p \wedge \neg q)
 \end{aligned}$$

## Il Connettivo “NAND”

- ▶ Si consideri il connettivo proposizionale binario **nand** la cui semantica è definita dalla seguente tabella di verità:

$P$	$Q$	$P \text{ nand } Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- ▶ Esercizio: si provi che l'insieme  $\{\text{nand}\}$  è **funzionalmente completo**.