Logica per la Programmazione

Lezione 11

- Regole di inferenza: Generalizzazione e Skolemizzazione

Linguaggio del Primo Ordine con Uguaglianza

- Considereremo sempre linguaggi del primo ordine con uguaglianza, cioè con il simbolo speciale di predicato binario "$=$" (quindi $= \in \mathcal{P}$)
- Il significato di "$=$" è fissato: per qualunque interpretazione, la formula $\mathbf{t} = \mathbf{t}'$ è vera se e solo se $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ denotano lo stesso elemento del dominio di interesse
- Più formalmente: data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, abbiamo $\mathcal{I}_\rho(\mathbf{t} = \mathbf{t}') = \mathbf{T}$ se $\alpha_\rho(\mathbf{t}) = \alpha_\rho(\mathbf{t}')$ (cioè se le semantiche di $\mathbf{t}$ e $\mathbf{t}'$ coincidono), $\mathbf{F}$ altrimenti

Leggi per l'Uguaglianza

- Per il predicato di uguaglianza valgono le seguenti leggi (dove la x può comparire libera in P):

$$\begin{array}{lll} (1) & (\forall x \,.\, (\forall y \,.\, (x = y) \;\Rightarrow\; (P \equiv P[y/x]))) & \textit{(Leibniz)} \\ (2) & (\forall x \,.\, (\forall y \,.\, (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x])) & \\ (3) & (\forall x \,.\, (\forall y \,.\, (x = y) \wedge P \;\Rightarrow\; P[y/x])) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (\forall y \,.\, (\forall x \,.\, (x = y) \Rightarrow P) \equiv P[y/x]) & \textit{(singoletto)} \\ (\forall y \,.\, (\exists x \,.\, (x = y) \wedge P) \equiv P[y/x]) & \end{array}$$

- **Esercizio**: Dimostrare che $(1) \equiv (2)$ e che $(1) \Rightarrow (3)$.

Regole di Inferenza: La Regola di Generalizzazione

- Per dimostrare una formula del tipo $(\forall x.P)$ possiamo procedere sostituendo x con un nuovo simbolo di costante d e dimostrare $P[d/x]$

$$\frac{\Gamma \vdash P[d/x],\ \text{con } d \text{ nuova costante}}{\Gamma \vdash (\forall x.P)}$$

- Intuitivamente, d rappresenta un **generico elemento del dominio** sul quale non possiamo fare alcuna ipotesi

Leggi per l'Uguaglianza e Generalizzazione

- Attenzione: spesso (e anche nella dispensa) queste leggi sono scritte informalmente *senza* quantificazioni:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & (x = y) \ \Rightarrow \ (P \equiv P[y/x]) & \qquad (\textit{Leibniz}) \\
(2) & (x = y) \wedge P \equiv (x = y) \wedge P[y/x]) & \\
(3) & (x = y) \wedge P \ \Rightarrow \ P[y/x] &
\end{array}
$$

- Se consideriamo x e y come variabili, sarebbero formule aperte, quindi non accettabili come leggi.
- Possiamo considerare la quantificazione universale implicita, quindi queste leggi come un abbreviazione di quelle presentate prima.
- Possiamo anche considerare x e y come costanti generiche e dedurre le formule quantificate universalmente con la Regola di Generalizzazione.

Regole di Inferenza: La Regola di Skolemizzazione

- Se sappiamo che $(\exists x.P)$ è vera, possiamo usarla per dimostrare una qualsiasi formula Q usando come ipotesi $P[d/x]$, dove d è una costante nuova, che non compare in Q:

$$\frac{\begin{array}{c}(\exists x.P) \in \Gamma \qquad \Gamma, P[d/x] \vdash Q \\ \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q\end{array}}{\Gamma \vdash Q}$$

- Intuitivamente, è come se chiamassimo d un **ipotetico elemento del dominio** che testimonia la verità di $(\exists x.P)$.

Sulla Regola di Skolemizzazione

- Dal Teorema di Deduzione sappiamo che

$$\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \qquad \text{se e solo se} \qquad \Gamma, P \vdash Q$$

- Sfruttiamo questo fatto per derivare dalla Regola di Skolemizzazione una regola più semplice, che usa solo implicazioni e non premesse.
- [Skolemizzazione], già vista

$$\frac{(\exists x.P) \in \Gamma \qquad \Gamma, P[d/x] \vdash Q \quad \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q}{\Gamma \vdash Q}$$

- [Skolemizzazione-$\Rightarrow$]

$$\frac{(\exists x\,.\,P) \wedge P[d/x] \wedge R \Rightarrow Q \quad \text{con } d \text{ nuova costante che non occorre in } Q}{(\exists x\,.\,P) \wedge R \Rightarrow Q}$$

Esempi di formule dimostrabili con Skolemizzazione

1. $(\forall x\,.\,P \Rightarrow Q) \wedge (\exists x\,.\,P) \Rightarrow (\exists x\,.\,Q)$
2. $(\forall x\,.\,P) \wedge (\exists x\,.\,Q) \Rightarrow (\exists x\,.\,P)$
3. $(\forall x\,.\,P \Rightarrow R) \wedge (\exists x\,.\,P \wedge Q) \Rightarrow (\exists x\,.\,Q \wedge R)$
4. $\big((\forall x\,.\,P \wedge \neg R) \vee \neg(\exists x\,.\,Q \wedge \neg S)\big) \wedge (\exists x\,.\,Q \vee R) \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\,.\,\neg P \wedge \neg(S \vee R))$

Esercizio: Dimostrare che la seguente formula non è valida:

$$(\forall x\,.\,P) \Rightarrow (\exists x\,.\,P)$$