Cognome Nome Matricola Firma

Corso di Laurea in Informatica
PROVA SCRITTA DI CALCOLO NUMERICO
22/01/2019

Si ricorda che le funzioni Matlab richieste negli esercizi devono essere trascritte sui fogli consegnati poiché non sarà scaricato alcun file Matlab dai computer sui quali operate.

Esercizio 1. Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$, definita da

$$A_n = I_n + \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_n^T + \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{x}^T,$$

dove I_n è la matrice identità di ordine n, $\boldsymbol{e}_n$ è la sua colonna $n-$esima e $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_{n-1}, 0]^T \in \mathbb{R}^n$.

1. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A_n è convergente se $\| \boldsymbol{x} \|_1 < 1$.
2. Si mostri che il metodo di Gauss-Seidel applicato per la risoluzione di un sistema lineare con matrice dei coefficienti A_n è convergente se e sole se $\| \boldsymbol{x} \|_2 < 1$.
3. Si mostri che vale $\| \boldsymbol{x} \|_2 \leq \| \boldsymbol{x} \|_1$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Si mostri che non vale $\| \boldsymbol{x} \|_1 \leq \| \boldsymbol{x} \|_2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. Si scriva una function MatLab che dati in input $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ restituisce il vettore $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ generato da un'iterazione del metodo di Gauss-Seidel con punto iniziale $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ applicato per la risoluzione del sistema lineare $A_n\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}$.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione $f(x) = x^3 + 7x^2 + 9 = 0$.

1. Si mostri che l'equazione ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[-8, -7]$ denotata con α.
2. Per l'approssimazione di questa soluzione si considera il metodo iterativo

$$x_{k+1} = \frac{f(a)x_k - f(x_k)a}{f(a) - f(x_k)}, \quad k \geq 0,$$

   con $a = -8$ e $x_0 = -7$. Si determini l'equazione della retta passante per $(a, f(a))$ e $(x_0, f(x_0))$. Si mostri che x_1 è il punto di intersezione della retta con l'asse delle ascisse. Si mostri quindi che la successione generata soddisfa $\alpha \leq x_{k+1} \leq x_k$ $\forall k \geq 0$. Se ne deduca che $\lim_{k\to+\infty} x_k = \alpha$.
3. Scrivere una funzione Matlab che dato in input $tol \in \mathbb{R}$ calcola la successione generata dal metodo iterativo arrestandosi quando $|f(x_k)| \leq tol$ e restituendo in uscita il valore di x_k. Riportare l'approssimazione di α ottenuta con $tol = 1.0e-12$.